

Kombinatoryka

Zestaw 3: ciągi binarne i tożsamości kombinatoryczne

1. Na ile sposobów można podzielić 109-osobową grupę sportowców na 5 zespołów 11-osobowych i 6 zespołów 9-osobowych, jeśli
 - (a) wszystkie zespoły mają wykonać to samo ćwiczenie?
 - (b) każdy zespół ma wykonać inne spośród 11 ćwiczeń?
 - (c) każdy z zespołów 11-osobowych ma wykonać inne spośród 5 ćwiczeń siłowych, a każdy z zespołów 9-osobowych ma wykonać inne spośród 6 ćwiczeń szybkościowych?

Użyj odpowiednich wzorów na N_1 , N_2 i N_3 poznanych na wykładzie.

2. Uzasadnij kombinatorycznie tożsamość:

$$\sum_{t_1+\dots+t_{10}=n} \frac{n!}{t_1!t_2!\dots t_{10}!} = 10^n.$$

3. Udowodnij kombinatorycznie, że

$$\binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k} = \binom{n}{m} \binom{m}{k}.$$

4. Oblicz: $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

5. Na ile sposobów można wybrać delegację (dowolnej liczebności) spośród 100 kobiet i 100 mężczyzn, w której kobiet jest więcej niż mężczyzn?

6. Podaj kombinatoryczne uzasadnienie tożsamości:

$$(a) \binom{2n}{2} = 2 \binom{n}{2} + n^2;$$

$$(b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (m-1)^{n-k} = m^n.$$

7. Udowodnij, że

$$\sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2} = \binom{2n}{n}^2.$$

8. Uzasadnij kombinatorycznie nierówność

$$\binom{n}{2} 6^{n-2} > 6^n - (5^n + n5^{n-1}), \quad \text{dla } n > 2.$$

Wskazówka: rzuty kostką.

9. W ilu ciągach złożonych z k zer i t jedynek żadne dwa zera nie sąsiadują ze sobą?
10. Ile jest ciągów binarnych o m zerach i n jedynek, które kończą się serią jedynek długości k ?
11. Ile jest ciągów o n zerach i m jedynek, zawierających dokładnie k serii zer?
12. Ile jest ciągów o n zerach i m jedynek, w których jest 9 serii, a każda seria ma długość co najmniej 13? Zakładamy, że $n, m \geq 100$.
13. Wyznacz liczbę ciągów binarnych długości $3n$, w których zer jest dwa razy więcej niż jedynek, serii jedynek jest k , a po każdej serii jedynek występuje nie krótsza od niej seria zer.

14. Oceń poprawność rozwiązania.

Zadanie: Ile jest ciągów binarnych długości n , o $2k$ jedynkach, w których wszystkie serie jedynek mają parzystą długość?

Rozwiązanie: Najpierw sklejamy jedynki po dwie i otrzymujemy k „superjedynek”. Następnie ustawiamy je w ciąg binarny razem z $n - 2k$ zerami, czyli na $\binom{n-k}{k}$ sposobów. Po rozklejeniu wszystkich superjedynek na pary jedynek wszystkie serie jedynek będą parzyste.

Odpowiedź: $\binom{n-k}{k}$

15. Ile ciągów x_1, \dots, x_{2n+1} spełnia 1) dwie pierwsze, 2) wszystkie z poniższych własności?

(a) $x_1 = x_{2n+1} = 0$,

(b) $|x_i - x_{i-1}| = 1$ dla $i = 2, \dots, 2n + 1$,

(c) $x_i \geq 0$ dla $i = 1, \dots, 2n + 1$.

16. Kandydaci A i B uzyskali w wyborach, odpowiednio 55 i 45 głosów. Komisja przelicza głosy w losowej kolejności (każda ze $100!$ kolejności jest jednakowo prawdopodobna). Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przez cały czas liczenia głosów, kandydat A zachowa przewagę (będzie mieć więcej głosów wśród już przeliczonych).