

Kombinatoryka

Zestaw 6: Zasada włączania i wyłączenia.

1. Szkoła, w której jest 120 uczniów, ma sekcje judo i karate. Liczba uczniów chodzących tylko na judo jest dwa razy większa od liczby tych, którzy chodzą na karate (i być może także na judo). Uczniów nieuczęszczających na żaden kurs jest o 25 więcej niż chodzących na oba kursy. 75 uczniów chodzi na co najmniej jeden kurs. Ilu uczniów uczęszcza na judo, ilu na karate, a ilu jest jednocześnie w obu sekcjach?
2. Ile jest liczb naturalnych mniejszych od 700 i względnie pierwszych z 6!?
3. Ile liczb całkowitych z przedziału od 1 do 250 jest podzielnych przez co najmniej jedna z liczb 3, 4, 6, 10?
4. Ile ciągów długości n , zbudowanych z liczb $0, 1, \dots, 2019$ zawiera co najmniej jedno zero, co najmniej jedną jedynekę i co najmniej jedną dwójkę?
5. Do czterech różnych, 5-osobowych samochodów wsiada 9 kobiet i 11 mężczyzn. Oblicz w ilu przypadkach w każdym samochodzie znajdzie się kobieta.
6. W ilu permutacjach liter słowa MATHEMATICS występuje zbitka MM lub AA lub THE?
7. W ilu permutacjach liczb $1, 2, \dots, 20$ pierwsza liczba jest większa od 5, a ostatnia jest mniejsza od 15?
8. Rozdajemy t różnych piłek wśród m dzieci ($t \geq m$). Na ile sposobów możemy to zrobić tak, aby przynajmniej jedno dziecko zostało bez piłki.
9. Na balu jest n małżeństw. W pewnym momencie panowie proszą panie do tańca, ale nie swoje żony. Na ile sposobów mogą to zrobić?
10. Siedzimy w rzędzie n małżeństw. W ilu ustawieniach żadne małżeństwo nie siedzi razem? Jak zmieni się wynik, jeśli małżeństwa siedzimy przy okrągłym stole (na nieponumerowanych krzesłach)?
11. Rzucamy n razy dwiema kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród wyrzuconych par pojawią się wszystkie pary (i, i) , $i = 1, 2, \dots, 6$.
12. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że graf wybrany losowo spośród wszystkich $\binom{n}{m}$ grafów o n wierzchołkach i m krawędziach, nie posiada wierzchołków izolowanych.