Kombinatoryka

Zestaw 7: Podziały zbiorów i liczb

B_n – # nieuporządkowanych podziałów zbioru $[n]$ na niepuste podzbiory (# Bella),
$S(n,k)$ – # nieuporządkowanych podziałów zbioru $[n]$ na k niepustych podzbiorów (# Stirlinga 2. rodzaju),
$s(n,k)$ – # Stirlinga 1. rodzaju,
$C(n,k)$ – # permutacji rzędu n o k cyklach,
$P(n,k)$ – # nieuporządkowanych podziałów liczby n na k dodatnich składników.

1. Sprawdź poprawność wzoru rekurencyjnego na liczby Bella dla $n = 4$.
2. Co jest większe: $P(n,k)$ czy $S(n,k)$?
3. Oblicz $P(n,2)$ i $S(n,2)$
4. Zapisz w postaci cyklicznej permutacje 368921457 i 826479135.
5. Sprawdź, że $|s(4,2)| = C(4,2)$.
6. Oblicz $P(n,n-2)$, $C(n,n-2)$ i $S(n,n-2)$.
7. Uzasadnij kombinatorycznie, że $P(8,5) \le \binom{7}{4}$ oraz $P(8,5) > \binom{7}{4}/5!$.
8. Uzasadnij, że $P(n,3)$ równa się liczbie podziałów liczby $2n$ na trzy składniki, wszystkie mniejsze niż n.
9. Wskaż bijekcje miedzy podziałami symetrycznymi liczby 18 a podziałami liczby 18 na różne i nieparzyste składniki.
10. Udowodnij, że $P(n,k) = P(n-1,k-1) + P(n-k,k)$ dla $n \ge k \ge 2$.
11. Udowodnij, że liczba podziałów liczby n na parzyste składniki równa się liczbie podziałów liczby n, w których każda liczba występuje parzystą liczbę razy (zero jest liczbą parzystą). Proszę to zrobić

    a) za pomoca diagramow Ferrersa.

    b) bez diagramów Ferrersa.