KOMBINATORYKA 1 – WYKŁAD 10
Zbiory częściowo uporządkowane

17 maja 2012

W rozdziale tym omówimy jedno z fundamentalnych pojęć kombinatoryki, jakim jest zbiór częściowo uporządkowany. Pokażemy w jaki sposób szereg podstawowych własności kombinatorycznych jest związanych z porządkiem wśród badanych obiektów.

Przedstawimy reprezentację skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych za pomocą struktur kombinatorycznych, takich jak graf skierowany i diagram Hassego. Wprowadzimy pojęcie łańcucha i antyłańcucha oraz związany z tymi pojęciami lemat Dilwortha, z którego wynikać będzie omówione wcześniej twierdzenie Erdősa–Szekeresa. W końcu wprowadzimy ważne pojęcia kraty oraz lokalnie skończonego zbioru częściowo uporządkowanego.

Niech X będzie dowolnym zbiorem (niekoniecznie skończonym). Relację binarną $\preceq$ na zbiorze X nazywamy *częściowym porządkiem*, gdy jest ona zwrotna, przechodnia i antysymetryczna, a parę $(X, \preceq)$ nazywamy *zbiorem częściowo uporządkowanym* lub, używając angielskiego skrótu, *posetem*. Jeżeli $x \preceq y$ i $x \neq y$, to piszemy $x \prec y$. Zamiast $x \preceq y$ i $x \prec y$, możemy pisać również $y \succeq x$ i $y \succ x$.

W przypadku, gdy wiadomo o jaką relację $\preceq$ chodzi, to często sam zbiór X nazywa się zbiorem częściowo uporządkowanym.

Jeżeli $x \preceq y$ lub $y \preceq x$, to mówimy, że elementy x i y są *porównywalne*. Częściowy porządek, który jest dodatkowo relacją *spójną* (tzn. każde dwa elementy $x, y \in X$ są porównywalne), nazywamy *porządkiem liniowym*, a parę $(X, \preceq)$ zbiorem *liniowo uporządkowanym*. Klasycznym przykładem zbioru liniowo uporządkowanego jest para $(\mathbb{R}, \leq)$, gdzie $\mathbb{R}$ jest zbiorem liczb rzeczywistych, natomiast $\leq$ jest zwykłą relacją mniejszości.

Skończony zbiór częściowo uporządkowany można reprezentować za pomocą grafu skierowanego.

Przykład 1: Graf porównań

Niech $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Określmy relację częściowego porządku na X w następujący sposób:

$a \preceq b$, $a \preceq c$, $a \preceq d$, $a \preceq e$, $a \preceq f$, $a \preceq g$, $a \preceq h$
$b \preceq c$, $b \preceq d$, $b \preceq e$, $b \preceq f$, $b \preceq h$
$c \preceq e$, $c \preceq f$
$d \preceq e$, $d \preceq f$, $d \preceq h$
$e \preceq f$
$g \preceq f$, $g \preceq h$

Ten częściowo uporządkowany zbiór $(X, \preceq)$ możemy przedstawić w postaci grafu skierowanego, przyjmując, że jeżeli $x \preceq y$, to istnieje łuk skierowany od wierzchołka x do wierzchołka y. Proszę ten graf narysować.

Drugim, bardziej czytelnym, sposobem reprezentacji skończonego zbioru częściowo uporządkowanego jest tak zwany *diagram Hassego*. W celu jego opisania musimy wprowadzić pojęcie bezpośredniego następnika (lub poprzednika) danego elementu. Otóż, jeżeli $x \prec y$ oraz dla dowolnego $z \in X$

$$(x \preceq z) \land (z \preceq y) \Rightarrow (z = x) \lor (z = y), \tag{1}$$

to piszemy $x \precsim y$ i mówimy, że y jest *bezpośrednim następnikiem* elementu x (lub x jest *bezpośrednim poprzednikiem* elementu y). Innymi słowy, relacja $x \precsim y$ oznacza, że żaden element z różny od x i różny od y nie spełnia warunku $x \preceq z \preceq y$ (jest to skrócony zapis lewej strony implikacji (1)).

Możemy zatem przejść do reprezentacji zbioru częściowo uporządkowanego $(X, \preceq)$ za pomocą grafu skierowanego zwanego *diagramem Hassego*. Wierzchołki tego grafu odpowiadają elementom należącym do zbioru X, przy czym (x, y) jest łukiem grafu wtedy i tylko wtedy, gdy x jest bezpośrednim poprzednikiem y. Można jednak pominąć skierowanie krawędzi, przyjmując zasadę, że jeśli $x \precsim y$, to wierzchołek y znajduje się na diagramie wyżej od wierzchołka x. Wówczas $x \preceq y$ wtedy i tylko wtedy, gdy w diagramie Hassego istnieje droga „w górę" od wierzchołka x do wierzchołka y.

Przykład 1 (cd). Diagram Hassego

Niech $(X, \preceq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym z przykładu 1. Proszę narysować diagram Hassego dla tego zbioru.

Przykład 2. Podzbiory zbioru skończonego

Niech X będzie skończonym zbiorem, $|X| = n$. Wtedy $\mathcal{B}(n) = (2^X, \subseteq)$ jest posetem, zwanym też *kratą boolowską*. Narysować $\mathcal{B}(n)$ dla kilku małych wartości n.

Przykład 3. Podziały zbioru skończonego na podzbiory

Niech X będzie skończonym zbiorem, $|X| = n$, a $\Pi(X)$ rodziną wszystkich podziałów zbioru X na niepuste i parami rozłączne podzbiory (kolejność podzbiorów nieistotna). Dla $\pi_1, \pi_2 \in \Pi$, piszemy $\pi_1 \preceq \pi_2$, gdy podział π_1 jest *rozdrobnieniem* podziału π_2, tzn. każdy blok podziału π_1 jest podzbiorem pewnego bloku podziału π_2. Wtedy $\mathcal{P}(n) = (\Pi(X), \preceq)$ jest posetem. Narysować $\mathcal{P}(n)$ dla kilku małych wartości n.

Niech $(X, \preceq)$ będzie dowolnym zbiorem częściowo uporządkowanym i niech $Y \subset X$. Oznaczmy przez $\preceq_Y$ obcięcie porządku $\preceq$ do zbioru Y. Wtedy $(Y, \preceq_Y)$ jest też posetem.

Przykład 4. Liczby naturalne z relacją podzielności

Piszemy $m|n$ gdy n jest podzielne przez m. Para $(\mathbb{N}, |)$ jest posetem. Narysować diagram Hassego dla obcięcia $(\mathbb{N}, |)$ do zbioru $Y = \{1, 2, \ldots, 13\}$.

Jeżeli $\preceq_Y$ jest porządkiem liniowym (tzn. każde dwa elementy należące do Y są porównywalne), to zbiór Y nazywamy *łańcuchem*. Innymi słowy, łańcuch to zbiór, który jest liniowo uporządkowany przez częściowy porządek. W przypadku, gdy żadne dwa elementy zbioru Y nie są porównywalne, to Y nazywamy *antyłańcuchem*. *Długość* łańcucha Y jest to liczba równa $|Y| - 1$. *Początek* i *koniec* łańcucha definiuje się w sposób naturalny. *Łańcuch maksymalny* z x do y jest to łańcuch o początku w x i końcu w y, który nie jest podzbiorem właściwym żadnego innego łańcucha z x do y.

Przykładami łańcuchów w zbiorze częściowo uporządkowanym z przykładu 1 są abc, abe, af, g. Łańcuch agh jest łańcuchem maksymalnym. Tej własności nie posiada łańcuch adh.

Rzędem elementu x oznaczanym przez $r(x)$, nazywamy długość najdłuższego łańcucha o końcu w x. Bardziej formalnie, niech $(X, \preceq)$ będzie dowolnym zbiorem częściowo uporządkowanym i niech $x \in X$. Oznaczmy przez $\mathcal{L}_x$ rodzinę wszystkich łańcuchów o końcu w x. Jeżeli istnieje liczba naturalna N taka, że długość żadnego łańcucha $L \in \mathcal{L}_x$ nie przekracza N, to

$$r(x) = \max\{|L| - 1 : L \in \mathcal{L}_x\}$$

W przeciwnym razie mówimy, że rząd elementu x jest *nieskończony.* W przykładzie 1 mamy $r(a) = 0$, $r(c) = 2$, $r(h) = 3$.

Twierdzenie 1 (Dualne Twierdzenie Dilwortha) *W dowolnym skończonym zbiorze częściowo uporządkowanym X maksymalna moc łańcucha jest równa minimalnej liczbie antyłańcuchów pokrywających zbiór X.*

Wniosek 1 (Lemat Dilwortha) *Jeśli $|X| \geq ab+1$ to X ma łańcuch mocy $a+1$ lub antyłańcuch mocy $b+1$.*

Na ćwiczeniach proszę udowodnić twierdzenie 1 wykorzystując pojęcie rzędu oraz wywnioskować wniosek 1 z twierdzenia 1.

Powróćmy teraz do rezultatu Erdősa-Szekeresa przedstawionego w poprzednim rozdziale. W twierdzeniu tym mamy do czynienia z liniowym porządkiem $\leq$ określonym na liczbach rzeczywistych. Zauważmy, że jedyną własnością relacji $\leq$ wykorzystaną w dowodzie tego twierdzenia jest fakt, że $\leq$ jest liniowym porządkiem na zbiorze $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Zatem wydaje się, że twierdzenie to pozostanie prawdziwe, jeżeli porządek $\leq$ zostanie zastąpiony przez *dowolny* liniowy porządek $\preceq_1$ na $\{x_1 \ldots, x_n\}$. Drugi liniowy porządek w twierdzeniu Erdősa-Szekeresa jest „ukryty”. Mianowicie elementy zbioru $\{x_1, \ldots, x_n\}$ są liniowo uporządkowane według porządku w jakim występują one w ciągu. Jak to pokażemy poniżej, i ten porządek można zastąpić przez *dowolnym* porządkiem liniowym $\preceq_2$ na zbiorze $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Twierdzenie 2 (Uogólnienie Twierdzenia Erdősa i Szekeresa) *Załóżmy, że $n = ab+1$ oraz $\preceq_1$ i $\preceq_2$ są dowolnymi liniowymi porządkami na zbiorze $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Wówczas istnieje podzbiór $T \subseteq S$ mocy $|T| = a+1$ taki, że dla wszystkich $x, y \in T$, $x \preceq_1 y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \preceq_2 y$, lub istnieje podzbiór $T \subseteq S$ mocy $|T| = b+1$ taki, że dla wszystkich $x, y \in T$ $x \preceq_1 y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y \preceq_2 x$.*

Innymi słowy, oba liniowe porządki $\preceq_1$ i $\preceq_2$ są w pełnej zgodności lub w pełnej niezgodności na pewnym podzbiorze T zadanej mocy. Dla przykładu, niech $a = b = 3$ i rozważmy zbiór $S = \{1, 2, \ldots, 10\}$ uporządkowany liniowo na następujące dwa sposoby:

$$10, 8, 6, 1, 3, 4, 5, 7, 9, 2$$

$$7, 10, 3, 4, 1, 8, 9, 6, 5, 2$$

Twierdzenie Erdősa-Szekeresa stwierdza, że musi istnieć podzbiór $T \subseteq S$ złożony z $a + 1 = 4$ elementów, na którym powyższe dwa porządki są w pełnej zgodności lub pełnej niezgodności. Rzeczywiście, za zbiór T można przyjąć, na przykład, zbiór $\{10, 4, 5, 2\}$ lub $\{8, 1, 4, 7\}$.

Na ćwiczeniach proszę udowodnić Uogólnienie Twierdzenia Erdősa i Szekeresa, wprowadzając na S częściowy porządek $x \preceq y$ wtedy i tylko wtedy gdy $x \preceq_1 y$ i $x \preceq_2 y$.

Teraz udowodnimy najważniejsze twierdzenie tego rozdziału. Jest ono dualne do Dualnego Tw. Dilwortha.

Twierdzenie 3 (Twierdzenie Dilwortha, 1950) *W dowolnym skończonym zbiorze częściowo uporządkowanym X maksymalna moc antyłańcucha jest równa minimalnej liczbie łańcuchów pokrywających X.*

Dowód (Tverberg, 1967): Indukcja względem $|X|$. Dla $|X| \leq 1$ twierdzenie jest oczywiste. Niech teraz $|X| > 1$. Oznaczmy przez m moc największego antyłańcucha w X i niech L będzie dowolnym maksymalnym łańcuchem w X.

Rozważmy zbiór $X \setminus L$. Gdyby największy antyłańcuch w $X \setminus L$ miał moc mniejszą niż m to na podstawie założenia indukcyjnego $X \setminus L$ można by pokryć $m - 1$ łańcuchami, które wraz z L dałyby pokrycie całego zbioru X przy pomocy m łańcuchów.

Przyjmijmy więc, że w $X \setminus L$ istnieje antyłańcuch $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Utwórzmy zbiory

$$G = \{x \in X : \exists a \in A : x \geq a\}$$

i

$$D = \{x \in X : \exists a \in A : x \leq a\}.$$

Do G nie należy początek łańcucha L, ani do D nie należy koniec L – jedno i drugie byłoby sprzeczne z maksymalnością L. Zatem $|D|, |G| < |X|$ i na podstawie założenia indukcyjnego $G = G_1 \cup \cdots \cup G_m$, $D = D_1 \cup \cdots \cup D_m$, gdzie D_i, G_i to łańcuchy. Bez straty ogólności można przyjąć, że $a_i \in G_i \cap D_i$,

$i = 1, \ldots, m$. Gdyby istniał $x \in X \setminus (G \cup D)$, to $x \cup A$ byłby antyłańcuchem mocy $m+1$ – sprzeczność z definicją m. Zatem

$$X = G \cup D = \bigcup_{i=1}^{m} (G_i \cup D_i),$$

a to jest rozkład X na m łańcuchów. ■

Przykład 5: Porządek interwałowy. Niech X będzie dowolną rodziną skończonych przedziałów na prostej. Wprowadzamy relację $I \leq J$ wgdy $I = J$ lub I „jest na lewo od" J, tzn. prawy koniec I poprzedza lewy koniec J. Powyższa relacja jest częściowym porządkiem (ćw.). Tw. Dilwortha zastosowane do porządków interwałowych implikuje znany skądinąd fakt, że grafy interwałowe są doskonałe (graf interwałowy to graf przecięć rodziny przedziałów X – wierzchołki reprezentują przedziały, a krawędzie łączą pary przedziałów przecinających się; antyłańcuchy to podgrafy pełne, łańcuchy to zbiory niezależne).

Teraz czeka nas seria definicji. Element $x \in X$ nazywamy *elementem minimalnym*, jeśli nie istnieje $y \in X$ taki, że $y < x$ (w przykładzie 1 tylko a); $x \in X$ nazywamy *elementem maksymalnym* jeśli nie istnieje $y \in X$ taki, że $y > x$ (f i h); $x \in X$ nazywamy *elementem najmniejszym* i oznaczamy przez 0, gdy dla każdego $y \in X \quad y \geq x$ (a); $x \in X$ nazywamy *elementem największym* i oznaczamy przez 1, gdy dla każdego $y \in X \quad y \leq x$ (w naszym przykładzie brak 1).

Ograniczenia dolne i górne zbioru $Y \subseteq X$ w $(X, \leq)$ to, odpowiednio, element $a \in X$ taki, że $x \geq a$ [$x \leq a$] dla wszystkich $x \in Y$. Oznaczmy przez $A(Y)$ i $B(Y)$ zbiór wszystkich ograniczeń górnych i dolnych zbioru Y. Jeśli w $A(Y)$ jest element najmniejszy, to nazywamy go *kresem górnym* zbioru Y i oznaczamy przez $\sup Y$. Jeśli w $B(Y)$ jest element największy, to nazywamy go *kresem dolnym* zbioru Y i oznaczamy przez $\inf Y$. Wprowadzamy wygodne oznaczenia $\sup\{x, y\} = x \vee y$ i $\inf\{x, y\} = x \wedge y$. W przykładzie 1: $A(c, d) = \{e, f\}$ i $B(c, d) = \{a, b\}$, więc $c \vee d = e$ i $c \wedge d = b$; ponadto $A(d, g) = \{f, h\}$ i $A(e, h) = \emptyset$, więc ani $d \vee g$ ani $e \vee h$ nie istnieje.

Def. Jeśli dla każdej pary x, y różnych elementów zbioru X istnieje kres dolny i kres górny, to X nazywamy *kratą*.

Wprowadzone wcześniej posety $\mathcal{B}(n)$, $\mathcal{P}(n)$ i $(\mathbb{N}, |)$ są kratami. Wyznaczyć kresy dowolnej pary ich elementów (ćw.).

Def. Mówimy, że $(X_1, \leq_1)$ jest izomorficzny z $(X_2, \leq_2)$, gdy istnieje bijekcja $f : X_1 \to X_2$ taka, że $x \leq_1 y$ wgdy $f(x) \leq_2 f(y)$.

Narysować wszystkie (parami nieizomorficzne) pięć krat o pięciu elementach (ćw.).

Przykład 6: Krata Younga. Kratą Younga nazywamy poset, którego elementami są wszystkie nierosnące nieskończone ciągi liczb naturalnych i zer $a = (a_1 \geq a_2 \geq \dots)$ o skończonej liczbie elementów niezerowych, przy czym

$$a \leq b \ \Leftrightarrow a_i \leq b_i \forall i$$

Zatem elementy kraty Younga reprezentują wszystkie nieuporządkowane rozbicia liczb naturalnych (element $(0, 0, \dots)$ interpretujemy jako puste rozbicie $\emptyset$). Narysować fragment diagramu Hassego i podać wzory na kresy.

Odcinkek $[x, y]$ definiujemy jako zbiór $\{z : x \leq z \leq y\}$. Na przykład $[b, f] = \{b, c, d, e, f\}$. Poset nazywamy *lokalnie skończonym*, gdy każdy odcinek jest skończony. Na przykład, $(\mathbb{R}, \leq)$ nie jest, a $(\mathbb{N}, \leq)$ jest lokalnie skończony. Również $(N, |)$ jest lokalnie skończony. Np. $[1, 10] = \{1, 2, 5, 10\}$. (Rys.)

Niech $([X]^{<\infty}$ oznacza rodzinę wszystkich skończonych podzbiorów zbioru X. (Gdy X jest zbiorem skończonym, to $([X]^{<\infty} = 2^X$.) Dla każdego X, poset $([X]^{<\infty}, \subseteq)$ jest lokalnie skończony.

Iloczynem kartezjaskim posetów $(X_i, \leq_i)$, $i \in I$, nazywamy poset $(\prod X_i, \leq$ $)$, gdzie dla $x, y \in \prod X$, mamy $x \leq y$ wgdy $x_i \leq y_i$ dla wszystkich $i \in I$. Załłżmy teraz, że wszystkie posety $(X_i, \leq_i)$ posiadają element najmniejszy 0. Dla każdego $x \in \prod X_i$ nich $I_x = \{i \in I : x_i \neq 0\}$. Wtedy ich sumą prostą nazywamy poset $(\bigoplus X_i, \leq)$, gdzie
$bigoplus X_i = \{x : |I_x| < \infty\}$, a $x \leq y$ wgdy $x_i \leq y_i$ dla wszystkich $i \in I$.