KOMBINATORYKA 1 – WYKŁAD 11
Kombinatoryczna teoria zbiorów

23 maja 2012

Wykład poświęcony jest własnościom rodzin podzbiorów skończonego zbioru. Rozpoczyna go pojęcie systemu różnych reprezentantów wraz ze słynnym twierdzeniem Halla. Następnie omówimy systemy Spernera, podając klasyczne twierdzenie Spernera i jego uogólnienie (nierówność LYM). Na zakończenie przedstawimy twierdzenie Erdősa-Ko-Rado wyznaczające moc największej rodziny parami przecinających się zbiorów.

1 Systemy różnych reprezentantów

Niech X będzie zadanym zbiorem. Oznaczmy przez 2^X rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru X. *Rodziną zbiorów* albo *hipergrafem* nazywamy uporządkowaną parę zbiorów $(X, \mathcal{F})$, gdzie $\mathcal{F} \subset 2^X$. *Systemem różnych reprezentantów (SRR)* rodziny $(X, \mathcal{F})$, gdzie $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ nazywamy taki *ciąg m różnych* elementów $x_1, \ldots, x_m$, że $x \in A_i$ dla każdego $i = 1, \ldots, m$. Na przykład, jeżeli

$$A_1 = \{2, 4\}, \quad A_2 = \{1, 2, 3\}, \quad A_3 = \{2, 3, 4\}, \quad A_4 = \{1, 4\},$$

to ciąg $(2, 1, 3, 4)$ jest systemem różnych reprezentantów tej rodziny. Zauważmy przy okazji, że pytanie z 1. wykładu, czy można dopasować kandydatów do stanowisk pracy w taki sposób, by każdy otrzymał pracę zgodnie ze swoimi uprawnieniami, jest pytaniem, czy dla rodziny zbiorów $\{s, i\}$, $\{s, d\}$, $\{s, d\}$, $\{m, s, c, i\}$, $\{b, i\}$ istnieje system różnych reprezentantów. Odpowiedź brzmi, że tak.

Z drugiej strony, na przykład, rodzina zbiorów

$$A_1 = \{1, 2\}, \quad A_2 = \{1, 3\}, \quad A_3 = \{1, 4\},$$

$$A_4 = \{1, 2, 3\}, \quad A_5 = \{5, 6\}, \quad A_6 = \{2, 3\},$$

nie ma systemu różnych reprezentantów. Rzeczywiście, wystarczy zauważyć, że cztery zbiory A_1, A_2, A_4 i A_6 mają łącznie tylko trzy różne elementy.

Ta obserwacja pokazuje, że aby rodzina $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ miała system różnych reprezentantów, *każda* podrodzina rodziny $\mathcal{F}$ musi zawierać *co najmniej* tyle elementów, ile zbiorów A_i wchodzi w skład tej podrodziny. Dokładniej, jeśli $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ jest systemem różnych reprezentantów rodziny zbiorów $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, to dla każdego podzbioru indeksów $S \subset [m]$ zachodzi warunek

$$\left| \bigcup_{i \in S} A_i \right| \geq \left| \bigcup_{i \in S} \{x_i\} \right| = |S|.$$

Poniżej udowodnimy, że ten warunek konieczny jest jednocześnie warunkiem dostatecznym, pokazując tym samym słynne twierdzenie Halla.

Twierdzenie 1 (Hall, 1935) *Rodzina $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ ma system różnych reprezentantów wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $S \subseteq [m]$*

$$\left| \bigcup_{i \in S} A_i \right| \geq |S|. \tag{1}$$

Dowód: Aby pokazać dostateczność warunku (1), zastosujemy indukcję względem m. Dla $m = 1$, twierdzenie jest prawdziwe. Niech teraz $m \geq 2$. Rozważmy dwa przypadki.

Najpierw załóżmy, że dla każdego $S \subset [m]$, gdzie $S \neq \emptyset$ oraz $S \neq [m]$ zachodzi

$$\left| \bigcup_{i \in S} A_i \right| > |S|.$$

Ustalmy element $x_m \in A_m$ i niech

$$A'_i = A_i \setminus \{x_m\}, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Wówczas rodzina $\{A'_1, \ldots, A'_{m-1}\}$ spełnia warunek (1), a więc, na podstawie założenia indukcyjnego, ma SRR, który po uzupełnieniu o x_m jest SRR całej rodziny $\mathcal{F}$

W drugim przypadku załóżmy, że istnieje $S \subset [m]$, $S \neq \emptyset$, $S \neq [m]$, dla którego

$$\left| \bigcup_{i \in S} A_i \right| = |S|$$

Oczywiście, podrodzina $\mathcal{F}_1 = \{A_i : i \in S\}$ też spełnia warunek (1) i, na podstawie założenia indukcyjnego, ma SRR $(x_1, \ldots, x_s)$, gdzie $s = |S|$. Wówczas

$$\bigcup_{i \in S} A_i = X := \{x_1, \ldots, x_s\}.$$

Dla $i \in [m] \setminus S$, niech $A'_i = A_i \setminus X$ oraz $\mathcal{F}_2 = \{A'_i : i \in [m] \setminus S\}$. Wówczas, dla każdego $T \subset [m] \setminus S$, $T \neq \emptyset$, mamy

$$\left| \bigcup_{i \in T} A'_i \right| = \left| \bigcup_{i \in T} A'_i \right| + |X| - |X| = \left| \bigcup_{i \in S \cup T} A_i \right| - |S| \geq |T|,$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z warunku (1) dla zbioru $S \cup T$. Zatem rodzina $\mathcal{F}_2$ spełnia warunek (1) i ma SRR, który w połączeniu z $(x_1, \ldots, x_s)$ stanowi SRR rodziny $\mathcal{F}$. ■

Twierdzenie Halla jest czasem zwane twierdzeniem o kojarzeniu małżeństw. Niech A_i będzie zbiorem chłopców, których zna dziewczyna i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Wówczas twierdzenie Halla stwierdza, że każda z m dziewcząt może poślubić chłopca, którego zna wtedy i tylko wtedy, gdy każde k dziewcząt zna co najmniej k chłopców, gdzie $k = 1, 2, \ldots, m$. Stąd już jeden krok do interpretacj grafowej twierdzenia Halla.

Rozważmy graf dwudzielny o podziale wierzchołków (V_1, V_2). Niech V_1 będzie zbiorem dziewcząt a V_2 zbiorem chłopców. Dwa wierzchołki łączymy krawędzią jeżeli odpowiadające im dziewczyna i chłopak znają się. Przez *skojarzenie nasycające* V_1 w grafie dwudzielnym będziemy rozumieli zbiór złożony z $|V_1|$ krawędzi, które nie mają wspólnych wierzchołków.

Oznaczmy przez $N(v)$ zbiór wszystkich sąsiadów wierzchołka v. Wówczas graf dwudzielny o podziale (V_1, V_2) ma skojarzenie nasycające V_1 wtedy i tylko wtedy gdy rodzina $\{N(v) : v \in V_1\}$ ma system różnych reprezentantów, co z kolei na mocy twierdzenia Halla zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $S \subset V_1$

$$|N(S)| = \left|\bigcup_{v \in S} N(v)\right| \geq |S|$$

Wspomnijmy jeszcze, że równoważna wersja twierdzenia Halla, w języku binarnych macierzy, została udowodniona w 1931 roku przez Königa.

2 Systemy Spernera

Systemem Spernera (SS) podzbiorów zbioru $X = [n]$ nazywamy rodzinę zbiorów, z których żaden nie zawiera się w drugim. Krótko, jest to antyłańcuch posetu $(X, \subseteq)$.

Problem: Wyznaczyć

$$\alpha_n = \max\{|\mathcal{F}| : ([n], \mathcal{F}) \text{ jest SS }\}$$

Jest to klasyczny problem ekstremalnej teorii zbiorów, której celem jest wyznaczanie minimalnej bądź maksymalnej mocy rodzin o zadanych własnościach.

Zauważmy, że dla każdego k mamy $\alpha_n \geq \binom{n}{k}$, zatem $\alpha_n \geq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$

Twierdzenie 2 (Twierdzenie Spernera, 1928)

$$\alpha_n = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

Dowód: Niech $X = [n]$. Pokażemy, że poset $(2^X, \subseteq)$ można rozbić na $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ łańcuchów, co na podstawie tw. Dilwortha zakończy dowód. Zauważmy, że $2^X = \bigcup_{r=0}^{n} [X]^r$ oraz, że

$$|[X]^0| < |[X]^1| < \cdots < |[X]^{\lfloor n/2 \rfloor}| = |[X]^{\lceil n/2 \rceil}| > \cdots > |[X]^{n-1}| > |[X]^n|.$$

Stosując tw. Halla udowodnimy teraz następujący lemat.

Lemat 1 *Dla każdego $r < n/2$ istnieje iniekcja $f_r : [X]^r \to [X]^{r+1}$ taka, że dla każdego $A \in [X]^r$ mamy $A \subset f_r(A)$. Podobnie, dla każdego $r > n/2$ istnieje iniekcja $g_r : [X]^r \to [X]^{r-1}$ taka, że dla każdego $A \in [X]^r$ mamy $A \supset g_r(A)$.*

Ten lemat pozwala skonstruować łańcuchy $\mathcal{L}_1, \dots \mathcal{L}_{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}$ przez zlepianie skojarzeń $(A, f_r(A))$ i $(g_r(A), A)$. W przypadku parzystego n, uzupełniamy je o nieskojarzone elementy ze środkowego poziomu $[X]^{n/2}$ (zrób rysunek). ■

Dowód Lematu 1 w oparciu o tw. Halla: Niech $r < n/2$, $V_1 = [X]^r$, a $V_2 = [X]^{r+1}$ (przypadek $r > n/2$ zostawiamy jako zadanie). Graf dwudzielny (V_1, V_2, E), gdzie $AB \in E$ wgdy $A \subset B$, jest fragmentem diagramu Hassego posetu $(2^X, \subseteq)$. Wierzchołki z poziomu r mają stopień $n - r$, a z poziomu $r + 1$ – stopień $r + 1$. Ustalmy $S \subseteq V_1$. Krawędzi wychodzących z S jest dokładnie $|S|(n - r)$. Z drugiej strony, jest ich nie więcej niż $|N(S)|(r + 1)$, a więc warunek Halla jest spełniony. Skojarzenie nasycające V_1 wyznacza iniekcję f_r. ■

Uogólnieniem twierdzenia Spernera, ale za to z prostszym dowodem jest nierówność LYM.

Twierdzenie 3 (Lubell 1966, Yamamoto 1954, Mieszalkin 1963) *Jeśli* $([n], \mathcal{F})$, *gdzie* $\mathcal{F} = \{A_1, ..., A_m\}$, *jest SS, a* $a_k = |\mathcal{F} \cap [n]^k|$, $k = 0, 1, ..., n$, *to*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq 1$$

Dowód błyskawiczny: Niech Π_i będzie zbiorem tych permutacji zbioru $[n]$, których początkowy segment długości $|A_i|$ składa się z elementów zbioru A_i, $i = 1, \dots, m$. Ponieważ $\mathcal{F}$ jest SS, to zbiory $\Pi_1, \dots, \Pi_m$ są parami rozłączne i, co za tym idzie, $|\Pi_1| + \dots |\Pi_m| \leq n!$. Ponadto, łatwo obliczyć, że $|\Pi_i| = |A_i|!(n - |A_i|)!$. Dzieląc stronami przez $n!$, otrzymujemy nierówność LYM. ■

Ponieważ

$$\frac{m}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \leq \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \leq 1 ,$$

to tw. Spernera wynika z nierówności LYM.

3 Rodziny przecinające się

Rodzinę $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ nazywamy *przecinającą się*, gdy dla dowolnych $A, B \in \mathcal{A}$ mamy $A \cap B \neq \emptyset$. Łatwo pokazać, że największa rodzina przecinająca się $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ ma rozmiar 2^{n-1} (ćwiczenia).

Teraz ograniczymy się tylko do zbiorów mocy r, to znaczy, do elementów rodziny $[n]^r$. Cała rodzina $[n]^r$ jest przecinająca się, gdy $r > n/2$, a gdy $r = n/2$, to z każdej pary zbiorów dopełniających się A, A^c trzeba odrzucić jeden. Zatem, w tym przypadku największa rodzina przecinająca się ma moc $\frac{1}{2}\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1}$. Najciekawszy jest przypadek $r < \frac{n}{2}$.

Niech $X = [n]$. Dla $x \in X$, oznaczmy przez $[X]^r_x$ rodzinę wszystkich $\binom{n-1}{r-1}$ zbiorów rodziny $[X]^r$, które zawierają element x. Oczywiście, taka rodzina jest przecinająca się, a co więcej, jest maksymalna (w sensie zawierania) o tej własności. Poniższe, klasyczne twierdzenie pokazuje, że jest to (jedyna co do izomorfizmu) największa rodzina przecinająca się.

Twierdzenie 4 (Erdős, Ko, Rado, 1961) *Niech $2 \leq r < n/2$. Wtedy*

(a) każda przecinająca się rodzina $\mathcal{A} \subseteq [X]^r$ ma moc nie większą niż $\binom{n-1}{r-1}$,

(b) ograniczenie to jest osiągnięte tylko przez rodziny postaci $[X]^r_x$.

Dowód (Katona, 1972): Udowodnimy tylko część (a). Niech $\mathcal{A} \subseteq [X]^r$ będzie przecinającą się rodziną zbiorów. Dla dowolnej permutacji cyklicznej σ zbioru X (jest ich $(n-1)!$), każdy zbiór kolejnych elementów nazywamy przedziałem. Niech x_σ będzie liczbą wszystkich zbiorów rodziny $\mathcal{A}$ będących przedziałami w permutacji cyklicznej σ. Ponieważ $\mathcal{A}$ jest przecinająca się, to $x_\sigma \leq r$. Z drugiej strony, każdy zbiór mocy r jest przedziałem w dokładnie $r!(n-r)!$ permutacjach cyklicznych. Stosując metodę dwukrotnego przeliczania, otrzymujemy więc równość

$$\sum_\sigma x_\sigma = |\mathcal{A}|r!(n-r)!,$$

z której wynika, że

$$|\mathcal{A}| \leq \frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!} = \binom{n-1}{r-1}.$$

■

Proszę pokazać na ćwiczeniach, że tw. 4 (obie części) wynika z następującej implikacji: jeśli $\mathcal{A}$ jest przecinająca się i $|\mathcal{A}| = \binom{n-1}{r-1}$, to $\mathcal{A} = [X]^r_x$ dla pewnego $x \in X$.