

KOMBINATORYKA 1 – WYKŁAD 9

Zasada szufladkowa i jej uogólnienia

18 grudnia 2006

Zasada szufladkowa, zwana też zasadą Dirichleta, a w jez. ang. „Pigeon-hole Principle” może być sformułowana następująco. Jeśli $n + 1$ gołębi przyfrunęło do n gołębników, to w pewnym gołębniku będą przynajmniej dwa gołębie. Bardziej formalnie ...

Twierdzenie 1 (Zasada szufladkowa) *Jeżeli*

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_t$$

oraz $|X| \geq t + 1$, to dla pewnego $i \in \{1, \dots, t\}$ zachodzi $|X_i| \geq 2$.

Przykłady:

- Mając dowolne dwa pudełka (prostopadłościany) zawsze można postawić jedno na drugim tak, by górne pudełko nie wystawało poza obręb dolnego.
- Na płaszczyźnie danych jest pięć punktów o współrzędnych całkowitych. Uzasadnić, że środek jednego z odcinków łączących te punkty jest również punktem o współrzędnych całkowitych.
- W każdym grafie istnieją 2 wierzchołki o tym samym stopniu

Jest zadziwiające, że dzięki tak prostemu aparatowi matematycznemu można wykazać prawdziwość niebanalnych faktów. Jako pierwsze zastosowanie tej metody, przedstawimy dowód twierdzenia Erdősa-Szekeresa dotyczącego monotonicznych podciągów liczb rzeczywistych. Mówimy, że ciąg liczb rzeczy-

wistych x_1, x_2, \dots, x_n jest *monotonicznie rosnący*, jeżeli $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, *monotonicznie malejący*, jeżeli $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ i *monotoniczny*, jeżeli jest monotonicznie rosnący lub malejący.

Twierdzenie 2 (Erdős, Szekeres, 1935) *Niech a, b będą liczbami naturalnymi, $n = ab + 1$ i niech x_1, x_2, \dots, x_n będzie dowolnym ciągiem n liczb rzeczywistych. Wówczas ciąg ten zawiera monotonicznie rosnący (malejący) podciąg złożony z $a + 1$ elementów albo monotonicznie malejący (rosnący) podciąg złożony z $b + 1$ elementów.*

Dowód: Każdemu elementowi x_i danego ciągu n liczb rzeczywistych przyporządkujemy uporządkowaną parę (l_i^-, l_i^+) , gdzie l_i^- jest długością najdłuższego monotonicznie malejącego podciągu o początku w x_i , a l_i^+ jest długością najdłuższego monotonicznie rosnącego podciągu o początku w x_i .

Załóżmy nie wprost, że każdy podciąg monotonicznie malejący ma długość $\leq a$ i każdy podciąg monotonicznie rosnący ma długość $\leq b$. Zdefiniujmy funkcję

$$f : \{1, 2, \dots, ab + 1\} \rightarrow \{1, 2, \dots, a\} \times \{1, 2, \dots, b\}$$

w taki sposób, że

$$f(i) = (l_i^-, l_i^+), \quad i = 1, 2, \dots, ab + 1$$

Funkcja f działa ze zbioru mocy n w zbiór mocy co najwyżej $ab = n - 1$. Zatem na podstawie zasady szufladkowej istnieją $i < j$ takie, że $f(i) = f(j)$. Jest to jednak niemożliwe. Jeżeli $x_i \leq x_j$, to mamy $l_i^+ > l_j^+$, a w przypadku, gdy $x_i \geq x_j$, to $l_i^- > l_j^-$. ■

Twierdzenie Erdősa-Szekeres'a jest „najlepsze z możliwych” w tym sensie, że przestaje być prawdziwe, gdy wartość n zmniejszymy z $ab + 1$ do ab . Zauważmy bowiem, że następujący ciąg złożony z ab liczb całkowitych nie zawiera ani monotonicznego rosnącego podciągu złożonego z $a + 1$ wyrazów ani monotonicznego malejącego podciągu złożonego z $b + 1$ wyrazów:

$$\begin{aligned} &ba + 1, ba + 2, \dots, ba + a \\ &(b - 1)a + 1, (b - 1)a + 2, \dots, (b - 1)a + a, \dots \\ &\dots 2a + 1, 2a + 2, \dots, 2a + a \\ &a + 1, a + 2, \dots, a + a \end{aligned}$$

Uwaga 1 Czasem zasada szufladkowa jest formułowana w formie swojej transpozycji jako zasada iniekcji.

Twierdzenie 3 (Zasada iniekcji) *Jeśli $f : D \rightarrow R$ jest różnowartościowa, to $|D| \leq |R|$.*

Zauważmy, że transpozycja powyższej zasady brzmi: jeśli $|D| > |R|$, to dla każdej funkcji $f : D \rightarrow R$ istnieją $x, y \in D$ takie, że $f(x) = f(y)$. Interpretując R jako zbiór t szufladek, D – zbiór rozmieszczanych elementów, a f jako rozmieszczenie (przeciwbrazy f wyznaczają podział D), otrzymujemy zasadę szufladkową. W powyższym dowodzie zasada iniekcji wydaje się nawet bardziej na miejscu, ale, oczywiście oba podejścia są równoważne.

Naturalnym uogólnieniem zasady szufladkowej jest tak zwana zasada podziałowa, która stwierdza, że jeżeli zbiór o dostatecznie dużej liczbie elementów podzielimy na pewną liczbę części, to któraś z nich będzie zawierała odpowiednio dużo elementów.

Twierdzenie 4 (Zasada podziałowa) *Niech m_1, \dots, m_t będzie ciągiem liczb naturalnych. Jeżeli*

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_t$$

oraz

$$|X| \geq \left(\sum_{i=1}^t m_i \right) - t + 1$$

to dla pewnego $i \in \{1, \dots, t\}$ zachodzi $|X_i| \geq m_i$.

Podamy teraz dwa przykłady zastosowań zasady podziałowej.

Twierdzenie 5 (Przyjęcie na sześć osób, czyli tw. Ramseya dla par i trójkąta)
Wśród dowolnych sześciu osób zawsze są trzy, które znają się nawzajem LUB trzy, które nie znają się nawzajem.

Dowód: Ustalmy jedną osobę, powiedzmy A . Na podstawie zasady podziałowej z $t = 2$, $m_1 = m_2 = 3$, A zna co najmniej 3 lub nie zna co najmniej 3 osób wśród pozostałych... ■

W oparciu o zasadę podziałową można podać (trochę) inny dowód Tw. Erdősa i Szekeresa. *Drugi dowód tw. Erdősa i Szekeresa:* Przy założeniu,

że nie ma podciągu rosnącego mocy większej niż a , rozważmy funkcję $g : [n] \rightarrow [a]$ określoną wzorem $g(i) = l_i^+$. Stosując zasadę podziałową z $t = a$ i $m_i = b + 1, i = 1, \dots, a$, wnioskujemy, że pewne $b + 1$ liczb $x_{i_1}, \dots, x_{i_{b+1}}, i_1 < \dots < i_{b+1}$, ma tę samą wartość parametru l_i^+ . Gdyby dla pewnych $j < l$, było $x_{i_j} \leq x_{i_l}$, to $l_{i_j}^+ > a$ – sprzeczność. Zatem $x_{i_1} > \dots > x_{i_{b+1}}$ i otrzymujemy podciąg malejący mocy $b + 1$. ■

Zasada szufladkowa i jej uogólnienie, zasada podziałowa, są szczególnymi przypadkami dość oczywistej zasady średniej.

Twierdzenie 6 (Zasada średniej) *Dla dowolnych liczb rzeczywistych a_1, \dots, a_t istnieją takie i, j , że*

$$a_i \leq \frac{1}{t}(a_1 + \dots + a_t) \leq a_j .$$

Na przykład, jest niemożliwe, by wszyscy zarabiali powyżej średniej lub by wszyscy spożywali mniej alkoholu niż „średnia krajowa na głowę mieszkańca”.

W szczególności, jeżeli

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_t,$$

to

1. dla pewnego $i \in \{1, \dots, t\}$ zachodzi $|X_i| \geq \lceil \frac{|X|}{t} \rceil$;
2. jeśli natomiast dodatkowo założyć, że wszystkie zbiory X_i są parami rozłączne, to dla pewnego $i \in \{1, \dots, t\}$ zachodzi $|X_i| \leq \lfloor \frac{|X|}{t} \rfloor$.

Można pokazać, że implikacja (1) jest równoważna zasadzie podziałowej (Ćwiczenie!).

Ta forma zasady podziałowej jest często stosowana łącznie z metodą *dwukrotnego przeliczania*, która teraz zilustrujemy bardzo ważnym (historycznie).

Ścieżki hamiltonowskie w turniejach. Turniej to zorientowany graf pełny. Przez ścieżkę w turnieju rozumiemy ścieżkę skierowaną. Ścieżka hamiltonowska, to ścieżka przechodząca przez wszystkie wierzchołki turnieju. Każdy turniej posiada co najmniej jedną ścieżkę hamiltonowską. Teraz pokażemy, że są turnieje, które mają ich wiele.

Twierdzenie 7 (Tw. Szele, 1943) *Dla każdego naturalnego n , istnieje turniej na n wierzchołkach posiadający co najmniej $n!2^{-n+1}$ ścieżek Hamiltona.*

Dowód: Niech \mathcal{T}_n będzie zbiorem wszystkich turniejów na zbiorze wierzchołków $[n]$. Zauważmy, że $|\mathcal{T}_n| = 2^{\binom{n}{2}}$. Dla każdego $T \in \mathcal{T}_n$, niech x_T oznacza liczbę ścieżek Hamiltona zawartych w T . Naszym celem jest pokazanie, że średnia $2^{-\binom{n}{2}} \sum_T x_T$ jest równa $n!2^{-n+1}$. Jest to fakt znacznie mocniejszy od tezy twierdzenia, która wynika z niego natychmiast na podstawie zasady średniej.

Suma $\sum_T x_T$ przelicza uporządkowane pary (T, π) , gdzie $T \in \mathcal{T}_n$ a π jest ścieżką Hamiltona w T . Teraz wprowadzimy w ruch technikę dwukrotnego przeliczania. Ścieżka Hamiltona jest jednoznacznie określona przez podanie permutacji wierzchołków. Te same pary (T, π) można więc przeliczyć sumując po wszystkich $n!$ permutacjach π liczby y_π zliczające wszystkie turnieje T zawierające daną ścieżkę π . Nietrudno zauważyć, że $y_\pi = 2^{\binom{n}{2}-n+1}$ dla każdej permutacji π . Ostatecznie,

$$\sum_T x_T = \sum_\pi y_\pi = n!2^{\binom{n}{2}-n+1},$$

co należało dowieść. ■