KOMBINATORYKA – 13

(zbiory częściowo uporządkowane)

1. Narysować diagram Hassego dla relacji podzielności na zbiorze $S = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Wskaż
a) największy łańcuch,
b) największy antyłańcuch,
c) najmniejszy zbiór łańcuchów pokrywających S,
d) najmniejszy zbiór antyłańcuchów pokrywających S.

2. Porządek interwałowy. X – dowolna rodzina obustronnie domkniętych przedziałów na prostej. $I \preceq J$ wgdy $I = J$ lub prawy koniec I poprzedza lewy koniec J. Uzasadnić, że jest to częściowy porządek. Wskazać przykład rodziny przedziałów X, w której a) są elementy minimalne, ale nie ma najmniejszego, b) nie ma elementów minimalnych ani maksymalnych.

3. Wskaż izomorfizm między
a) $\{1, 2, \ldots, n\}$ ze standardową relacją $\leqslant$, a $\{1, 2, \ldots, n\}$ ze standardową relacją $\geqslant$.
b) $\{2, 3, 4, 6, 8\}$ z relacją podzielności a pewną rodziną podzbiorów z relacją $\subseteq$.

4. Pokazać, że $(\mathbb{N}, |)$ jest kratą. Wyznaczyć $\inf \mathbb{N}$.

5. Niech $\mathcal{A}$ będzie dowolną rodziną podzbiorów pewnego zbioru X ($\mathcal{A} \subseteq 2^X$). Udowodnij, że relacja zawierania $\subseteq$ jest częściowym porządkiem na $\mathcal{A}$. Dla jakich $\mathcal{A}$ jest to porządek liniowy?

6. Niech $\mathcal{P}(n)$ będzie rodziną podziałów zbioru $\{1, \ldots, n\}$ na niepuste podzbiory z relację rozdrobnienia. Uzasadnij, że jest to porządek częściowy i narysuj diagram Hassego dla $n = 5$.

7. Niech $M(X)$ będzie posetem wszystkich kombinacji z powtórzeniami (multizbiorów) ze zbioru X. Zbiór $A \in M(X)$ jest w pełni określony przez krotności $r_i(A)$ – liczby wystąpień elementu i w A, dla wszystkich $i \in X$. Pokazać, że poset $M(\mathbb{N})$ jest izomorficzny z posetem $(\mathbb{N}, |)$.

8. Przedstawić $M(\mathbb{N})$ jako sumę prostą.

9. Udowodnij dualne twierdzenie Dilwortha. Wskazówka: wykorzystać pojęcie rzędu (patrz wykład 10).

10. Udowodnij lemat Dilwortha, korzystając z dualnego twierdzenia Dilwortha (patrz wyłkad 10).

11. W oparciu o Lemat Dilwortha udowodnij uogólnione twierdzenie Erdősa-Szekeresa (patrz wykład 10).

12. Czy maksymalny łańcuch i maksymalny antyłańcuch mogą być rozłączne?

13. Udowodnij, że każdy poset $(X, \preceq)$ jest izomorficzny z posetem $(\mathcal{A}, \subseteq)$ dla pewnej rodziny podzbiorów $\mathcal{A} \subseteq 2^X$.

14. Narysuj diagramy Hassego dla wszystkich parami nieizomorficznych krat o 5 elementach.

15. Czy zbiór kól na płaszczyźnie z relacją zawierania jest kratą?

16. Niech X będzie zbiorem skończonym. Udowodnij, że $(2^X, \subseteq)$ jest kratą. Dla kardego $Y \subseteq 2^X$ wyznacz kresy $(\sup Y, \inf Y)$.

17. Dla kraty Younga X, wyznacz
a) $x \vee y$, $x \wedge y$ dla dowolnych $x, y \in Y$,
b) $\sup Y$, $\inf Y$ dla dowolnego skończonego $Y \subseteq X$.

18. (a) Iloczyn kartezjański lokalnie skończonych posetów nie musi być lokalnie skończony. (b) Suma prosta lokalnie skończonych posetów jest lokalnie skończona.

19. Pokazać, że punkty kratowe na płaszczyźnie tworzą kratę, która jest sumą prostą dwóch porządków liniowych.