KOMBINATORYKA – 15

(konfiguracje kombinatoryczne (KK), systemy trójek Steinera (STS), kwadraty łacińskie)

ZD1. Pokaż, stosując metode podwójnego przeliczania, że dla dowolnej KK zachodzi $bk = vr$.

ZD2. Udowodnij, że w KK kwadratowej każde dwa (różne) bloki przecinają się na dokładnie λ wierzchołkach. (Przypadek $\lambda = 1$ – obowiązkowo, przypadek $\lambda > 1$ – dla chętnych.)

ZD3. Rozważmy zawody żużlowe dla 13 zawodników, czyli (13,4,1)-konfigurację.
a) Ile biegów rozegrano w zawodach ?
b) W ilu biegach uczestniczył każdy zawodnik ?
c) Czy mogły zdarzyć się takie biegi B_1 i B_2, że żaden zawodnik z B_1 nie startował w B_2 ?

ZD4. Uzasadnij, że nie istnieje (10,4,2)-konfiguracja.

ZD5. Dla $n = 9$ podaj przykład a) STS, b) systemu trójek Kirkmana.

ZD6. Niech S_1 i S_2 będą dwoma STS na X i Y odpowiednio, i niech $Z = X \times Y$. Do zbioru trójek E zaliczamy trójki tych elementów zbioru Z, których pierwsze współrzędne pokrywają się a drugie tworzą trójkę w S_2 lub odwrotnie, pierwsze współrzędne tworzą trójkę w S_1, a drugie pokrywają się, lub pierwsze tworzą trójkę w S_1 a drugie tworzą trójkę w S_2. Pokaż, że para (Z, E) jest STS.

ZD7. Wyznacz liczbę wszystkich kwadratów łacińskich rzędu 3.

ZD8. Skonstruuj $n - 1$ ortogonalnych kwadratów łacińskich dla $n = 3, 7, 8, 9$.

ZD9. Niech W będzie macierzą kwadratową, której każda kolumna jest postaci 123...n, a K macierzą, której każdy wiersz jest postaci 123...n. Pokazać, że macierz L jest kwadratem łacińskim rzędu n wtedy i tylko wtedy, gdy obie pary macierzy, L i W oraz L i K, są ortogonalne.

ZD10. Uzasadnij, że każde Sudoku $n^2 \times n^2$, bez wypełnionych pól, posiada rozwiązanie. Podaj przykład Sudoku $3^2 \times 3^2$ z częściowo wypełnionymi polami, które nie ma rozwiązania.