RAP 412	24 października 2008

Wykład 1: Funkcje tworzące

Wykładowca: Andrzej Ruciński *Pisarz:Krzysztof Krzywdziński i Paweł Wawrzyniak*

Dokończenie poprzedniego wykładu

Załóżmy, że $S_0 = 0$, $p = \frac{1}{2}$, $T_{2n}-$ czas ostatniej wizyty w punkcie 0, w ciągu pierwszych $2n$ kroków. Ponadto oznaczmy $\alpha_{2n}(2k) = P(T_{2n} = 2k)$.

Twierdzenie 1 (Prawo arcusa sinusa dla ostatniej wizyty w zerze)**.**

$$\alpha_{2n}(2k) = P(S_{2k} = 0) \cdot P(S_{2n-2k} = 0) = u_{2k} \cdot u_{2n-2k}.$$

Przed rozpoczęciem dowodu zauważmy, że

$$u_{2k} = \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \sim \frac{\sqrt{4\pi k} \cdot (2k)^{2k} \cdot e^{-2k}}{(\sqrt{2\pi k} \cdot k^k \cdot e^{-k})^2 \cdot 2^{2k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi k}},$$

zatem dla dużych k i $n-k$ mamy

$$\alpha_{2n}(2k) \sim \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}.$$

Ponadto zauważmy, że

$$\begin{aligned} F_{\frac{T_{2n}}{2n}}(x) &= P\left(\frac{T_{2n}}{2n} \leq x\right) = P(T_{2n} \leq 2nx) \\ &\sim \sum_{k \leq xn} \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}} \\ &\sim \int_0^{xn} \frac{dk}{\pi\sqrt{k(n-k)}} \\ &= \frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

Jeśli przeformułujemy problem na język orłów i reszek, to mogą zadziwić nas następujące „zaskoczątka”:

1) Intuicja podpowiada, że ostatnie zrównanie się liczby orłów i liczby reszek powinno mieć miejsce pod koniec eksperymentu, ale

$$\alpha_{2n}(2k) = \alpha_{2n}(2n-2k).$$

Dla przykładu mamy:

$$P\left(T_{2n} \leq \frac{2n}{10}\right) = P\left(T_{2n} \geq \frac{9}{10}(2n)\right)$$

oraz

$$P(T_{2n} \leq n) = P(T_{2n} \geq n).$$

2) Intuicyjnie również powinno być dużo zrównań liczby orłów i reszek podczas eksperymentu, ale

$$P(T_{2n} \leq n) = \frac{1}{2}, \qquad P\left(T_{2n} \leq \frac{2n}{10}\right) \sim \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{10}}\right) \approx \frac{1}{5}.$$

Przejdźmy teraz do dowodu powyższego twierdzenia.

Dowód.

$$\begin{aligned} \alpha_{2n}(2k) &= P(T_{2n} = 2k) = P(S_{2k} = 0, S_{2k+1} \cdot \ldots \cdot S_{2n} \neq 0) \\ &= P(S_{2k} = 0) \cdot P(S_1 \cdot \ldots \cdot S_{2n-2k} \neq 0) \\ &\overset{(ZD2-9)}{=} P(S_{2k} = 0) \cdot P(S_{2n-2k} = 0). \end{aligned}$$

□

1 Funkcje tworzące

Definicja 1 (Funkcja tworząca). *Funkcję $G_{\mathbf{a}}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i$ nazywamy funkcją tworzącą dla danego ciągu $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots)$. Funkcję $E_{\mathbf{a}}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i s^i}{i!}$ nazywamy wykładniczą funkcją tworzącą dla danego ciągu $\mathbf{a}$.*

Definicja 2 (Konwolucja (splot)). *Splotem danych dwóch ciągów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ nazywamy taki ciąg $\mathbf{c} = \mathbf{a} * \mathbf{b}$, że $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$. Ponadto jest jasne, że $G_{\mathbf{c}} = G_{\mathbf{a}} \cdot G_{\mathbf{b}}$.*

Przykład 1. *Niech dane są takie dwa skończone ciągi $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, że $a_i = b_i = \binom{n}{i} = a_{n-i}$, dla $i = 0, 1, \ldots, n$. Niech też $\mathbf{c} = \mathbf{a} * \mathbf{a}$, a zatem $c_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}^2$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$. Mamy wtedy*

$$G_{\mathbf{c}}(s) = (G_{\mathbf{a}}(s))^2 = ((1+s)^n)^2 = (1+s)^{2n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{i} s^i,$$

czyli z definicji splotu

$$c_k = \binom{2n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{n}{k-i},$$

dla każdego $k = 0, 1, \ldots, n$.

Definicja 3 (Funkcja tworząca prawdopodobieństwo dyskretnej zmiennej losowej X). *Niech $X \in \mathbb{Z}$ będzie zmienną losową. Wówczas funkcję*

$$G_X(s) = E(s^X) = \sum_i s^i P(X = i) = \sum_i s^i p_i = G_{\mathbf{p}}(s)$$

nazywamy funkcją tworzącą prawdopodobieństwo zmiennej losowej X.

Przykład 2. *Dla rozkładu Poissona $G(s) = e^{\lambda(s-1)}$, dla rozkładu geometrycznego $G(s) = \frac{ps}{1-s(1-p)}$.*

1.1 Liczenie momentów

Okazuje się, że funkcje tworzące są bardzo przydatne w liczeniu momentów zmiennych losowych dyskretnych. Niech $(a)_k$ oznacza spadający iloczyn $\left(\frac{a!}{(a-k)!}\right)$. Wartość $E\left((X)_k\right)$ będziemy nazywali *k-tym momentem silniowym* zmiennej losowej X. W terminach momentów silniowych można na przykład z łatwością opisać wariancję:

$$Var(X) = E\left((X)_2\right) + E(X) - \left(E(X)\right)^2.$$

Twierdzenie 2. *Niech X będzie dyskretną zmienną losową o funkcji tworzącej $G(s)$, wtedy*

$$E\left((X)_k\right) = G^{(k)}(1),$$

gdzie $G^{(k)}(1)$ jest skrótem od wyrażenia $\lim_{s\to 1} G^{(k)}(s)$, gdy promień zbieżności szeregu jest równy 1.

Dowód. Niech $s < 1$. Po obliczeniu k-tej pochodnej mamy:

$$G^{(k)}(s) = \sum_i s^{i-k}(i)_k p_i = E(s^{X-k}(X)_k)$$

Dla $s \to 1$ mamy więc z twierdzenia Abela dla szeregów nieskończonych

$$G^{(k)}(1) = \lim_{s\to 1} G^{(k)}(s) = E\left((X)_k\right).$$

□

1.2 Sumy zmiennych niezależnych

Funkcje tworzące ułatwiają także określanie rozkładów sum niezależnych zmiennych losowych. A to dzięki prostej zależności opisanej w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 3. *Niech X, Y będą niezależnymi dyskretnymi zmiennymi losowymi. Wtedy zachodzi równość $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$.*

Dowód. Z niezależności X i Y zmienne losowe s^X i s^Y są niezależne, więc $E(s^X s^Y) = E(s^X)E(s^Y)$. □

Przykład 3. *Niech S_n będzie zmienną losową o rozkładzie dwumianowym $Bin(n,p)$. Wtedy oczywiście $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, gdzie X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi zero–jedynkowymi przyjmującymi wartość 1 z prawdopodobieństwem p i wartość 0 z prawdopodobieństwem $q = 1-p$. Czyli dla dowolnego i mamy $G_{X_i} = s^0 q + s^1 p = q + ps$. Ostatecznie, korzystając z twierdzenia 3:*

$$G_{S_n}(s) = \left(G_{X_1}(s)\right)^n = (q+ps)^n.$$

A co jeśli zmienna losowa jest sumą losowej liczby niezależnych zmiennych losowych?

Twierdzenie 4. *Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie. Oznaczmy $G_{X_i} = G$ dla $i = 1, 2 \ldots$. Niech $N \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ będzie zmienną losową niezależną od $X_1, X_2, \ldots$ oraz $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$. Przy tych oznaczeniach zachodzi równość*

$$G_S(s) = G_N\left(G(s)\right).$$

Dowód. $G_S(s) = E(s^S) = E\left(E\left(s^S|N\right)\right)$. Czyli z niezależności zmiennych N i $X_1, X_2, \ldots$ oraz definicji wartości oczekiwanej:

$$\begin{aligned}
G_S(s) &= \sum_n E\left(s^S\right)\Pr(N = n) \\
&= \sum_n E\left(s^{X_1+X_2+\ldots+X_n}\right)\Pr(N = n) \\
&= \sum_n E\left(s^{X_1}\right)\ldots E\left(s^{X_n}\right)\Pr(N = n) \\
&= \sum_n \left(G\left(S\right)\right)^n \Pr(N = n) \\
&= G_N\left(G\left(s\right)\right).
\end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika z definicji funkcji tworzącej zmiennej losowej. □

Przykład 4. *Kura znosi N jaj, gdzie N jest zmienną losową o rozkładzie Poissona $Po(\lambda)$. Ze zniesionych jaj z prawdopodobieństwem p wykluwa się kurczak, natomiast z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$ nie wykluwa się nic. Można zadać pytanie: „Ile wykluje się kurcząt?". Będzie to pytanie o rozkład zmiennej losowej $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Skoro:*

$$G_N(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} s^i = e^{\lambda(s-1)}$$

oraz

$$G_{X_i}(s) = G(s) = q + ps,$$

więc z twierdzenia 4

$$G_S(s) = G_N\left(G\left(s\right)\right) = e^{\lambda(q+ps-1)} = e^{\lambda p(s-1)}.$$

Czyli ostatecznie S ma rozkład Poissona $Po(\lambda p)$.

1.3 Zastosowanie dla spacerów losowych

„Po obfitej jajecznicy możemy wyjść na spacer". W spacerze losowym o punkcie początkowym w zerze ($S_0 = 0$), zdefiniujmy czas po którym po raz pierwszy wrócimy do punktu wyjścia, czyli: $T_0 = \min\{S_n = 0 : n \geq 1\}$. Oczywiście $T_0 \in \{2, 4, \ldots\} \cup \{\infty\}$. Chcemy znaleźć rozkład tej zmiennej losowej. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}
&f_0(0) = 0 \\
&f_0(n) = \Pr(T_0 = n) = \Pr(S_1, \ldots, S_n - 1 \neq 0, S_n = 0), \text{ dla } n \geq 1 \\
&p_0(n) = \Pr(S_n = 0)
\end{aligned}$$

Przy tych oznaczeniach zmienne losowe T_0 i S_n mają funkcje tworzące:

$$P_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_0(n) s^n$$

$$F_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_0(n) s^n$$

Twierdzenie 5. *Przy oznaczeniach wprowadzonych powyżej:*

a) $P_0 = 1 + P_0 F_0$

b) $P_0(s) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}}$

c) $F_0(s) = 1 - \sqrt{1-4pqs^2}$

Dowód. Udowodnijmy najpierw punkt a) twierdzenia. Zauważmy, że dla dowolnego $n \geq 1$

$$p_0(n) = \sum_{k=1}^{n} f_0(k) p_0(n-k),$$

gdyż, jeśli w k-tej chwili jesteśmy w punkcie wyjściowym, to tak, jak byśmy zaczynali spacer od nowa. Czyli, mówiąc nieformalnie, sumujemy po wszytskich momentach bycia wcześniej w zerze po raz pierwszy a potem „resetujemy” czas.

Korzystając z operacji splotu, definicji funkcji tworzących P_0 i F_0 oraz pamiętając, że $p_0(0) = 1$ i $f_0(0) = 0$ mamy:

$$\begin{aligned} P_0(s) - 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} p_0(n) s^n - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} p_0(n) s^n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f_0(k) p_0(n-k) \right) s^n = \\ &= \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} f_0(m_1) s^{m_1} \right) \left(\sum_{m_2=0}^{\infty} p_0(m_2) s^{m_2} \right) = F_0(s) P_0(s). \end{aligned}$$

Punkt b) twierdzenia wynika z tego, iż $p_0(n) = \binom{n}{n/2} (pq)^{\frac{n}{2}}$. Ostatecznie, korzystając z rozwiązania zadania domowego mamy:

$$p_0(s) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}}$$

Punkt c), po prostych przeliczeniach, wynika z a) i b). □

Wniosek 1.

- *Jeśli* $p = q = \frac{1}{2}$, *to z prawdopodobieństwem 1 wrócimy do punktu wyjścia, gdyż:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_0(n) = F_0(1) = 1 - \sqrt{1-4pq} = 1 - \sqrt{(p-q)^2} = 1 - |p-q|$$

- *Dla* $p = \frac{1}{2}$ *wartość oczekiwana czasu powrotu jest nieskończona, gdyż skoro:*

$$\lim_{s \to 1^-} \left(1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}\right)' = \lim_{s \to 1^-} \frac{2s}{2\sqrt{1-s^2}} = \infty,$$

  więc

$$E(T_0) = F_0'(1) = \infty.$$