10 Grafy doskonałe

Graf G jest *doskonały*, gdy dla każdego indukowanego podgrafu $H \subseteq G$, mamy $\chi(G) = \omega(G)$, gdzie $\omega(G)$ jest liczbą klikową grafu G, tj. liczbą wierzchołków w największym podgrafie pełnym grafu G. W grafie doskonałym, żeby stwierdzić czy $\chi(G) < k$ wystarczy przejrzeć wszystkie podzbiory wierzchołków mocy k (a jest ich mniej niż n^k); jeśli żaden z nich nie indukuje podgrafu pełnego, to odpowiedź jest pozytywna; w przeciwnym razie, oczywiście, negatywna.

Wiele ważnych w zastosowaniach klas grafów jest doskonałych. Przede wszystkim, trywialnie, grafy dwudzielne, a także, jako wniosek z Twierdzenia Königa, ich dopełnienia. Również grafy porównań i grafy przedziałowe, oraz ich dopełnienia.

Teraz, na zasadzie przykładu, zajmiemy się inną, specjalną klasą grafów. *Grafem przekątniowym* nazywamy graf, w którym żaden cykl o długości większej niż trzy nie jest indukowany. Innymi słowy, każdy cykl oprócz trójkątów posiada przekątną. Naszym celem jest pokazanie, że grafy przekątniowe są doskonałe. Najpierw przyjrzymy się ich strukturze. Mówimy, że G jest wynikiem *sklejenia* G_1 i G_2 wzdłuż S, jeśli $G = G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2 = S$ oraz G_1, G_2, S są indukowanymi podgrafami grafu G, Poniższa własność podaje rekursywną, konstrukcyjną definicję grafu przekątniowego.

Fakt 8 (D 5.5.1) *G jest przekątniowy wgdy jest wynikiem ciągu sklejeń grafów przekątniowych wzdłuż podgrafów pełnych, zaczynając od grafów pełnych.*

Dowód: W jedną stronę jest to trywialne. Każdy indukowany cykl w G musi zawierać się w całości w G_1 lub w G_2, a więc musi być trójkątem.

W drugą stronę, zastosujemy indukcję względem $|G|$. Jeśli G jest pełny, to można przyjąć $G_1 = G_2 = S = G$. Jeśli G nie jest spójny, to można przyjąć $S = \emptyset$. Załóżmy więc, że G nie jest pełny i jest spójny. Niech $a, b \in V(G)$, $ab \notin E(G)$. Niech, ponadto, X będzie minimalnym zbiorem rozdzielającym a i b, $X \subseteq V(G) \setminus \{a, b\}$. Niech C_a będzie składową grafu $G - X$ zawierającą a, C_b analogicznie. Niech $G_1 = G[V(C_a) \cup X]$, $G_2 = G - V(C_a)$. Tak więc G jest sklejeniem G_1 i G_2 wzdłuż $S = G[X]$. Grafy G_1 i G_2 jako indukowane podgrafy G są przękątniowe i mają mniej wierzchołków niż G. Zatem na podstawie założenia indukcyjnego oba są wynikiem sklejania określonego w tekscie Factu 8. Pozostaje pokazać, że S jest podgrafem pełnym.

Niech $s, t \in X$. Z minimalności X wynika, że zarówno s jak i t mają sąsiadów w każdej składowej $G - X$. Zatem G_i ma X-ścieżkę z s do t,

$i = 1, 2$. Niech P_i będzie nakrótszą taką ścieżką, $i = 1, 2$. Wtedy $P_1 \cup P_2$ jest cyklem w G, który powinien mieć przekątną. Ale żadna para wierzchołków tego cyklu poza st nie może być połączona krawędzią. Zatem $st \in E(G)$. ∎

Fakt 9 (D 5.5.2) *Każdy graf przekątniowy jest doskonały.*

Dowód: Grafy pełne są doskonałe. Zatem w świetle Faktu 8 wystarczy pokazać, że graf G otrzymany w wyniku sklejenia dwóch grafów doskonałych wzdłuż podgrafu pełnego S jest doskonały. Niech H będzie indukowanym podgafem grafu G. Pokażemy że $\chi(H) \leq \omega(H)$. Niech $H_i = H \cap G_i$ oraz $T = H \cap S$. Z doskonałości G_i wynika, że $\chi(H_i) \leq \omega(H_i)$, $i = 1, 2$. Zauważmy, że $\omega(H) \geq \max_i \omega(H_i)$, ale, z drugiej strony, $\chi(H) = \max_i \chi(H_i)$. Ta ostatnia równość wynika stąd, że po odpowiedniej permutacji kolorów grafu H_2, można tak pokolorować osobno H_1 i H_2, że kolory na wspólnej części S zgadzają się (jest to możliwe dzięki temu, że S jest grafem pełnym i wszystkie kolory na S są różne). ∎

Oznaczmy przez $\bar{G}$ dopełnienie grafu G.

Twierdzenie 20 (D 5.5.3, Lovász, 1972) *G jest doskonały wgdy $\bar{G}$ jest doskonały.*

Mówimy że graf G' jest wynikiem *sklonowania* wierzchołka x w grafie G, gdy G' powstaje z G przez dodanie nowego wierzchołka x' oraz połączenie go z x oraz ze wszystkimi sąsiadami x w G.

Fakt 10 (D 5.5.4) *Graf G' będący wynikiem sklonowania wierzchołka grafu doskonałego jest doskonały.*

Dowód: Indukcja względem $|G|$. Jest to prawdą dla $G = K_1$. Niech $G \neq K_1$. Wystarczy pokazać, że $\chi(G') \leq \omega(G')$. Nie musimy się troszczyć o właściwe podgrafy indukowane grafu G', bo każdy z nich jest albo podgrafem indukowanym grafu G (gdy nie zawiera jednocześnie obu wierzchołków x i x') albo jest wynikiem sklonowania wierzchołka x w podgrafie grafu G. W pierwszym przypadku korzystamy z doskonałości G, w drugim – z założenia indukcyjnego.

Oznaczmy $\omega = \omega(G)$. Wtedy $\omega(G') \in \{\omega, \omega + 1\}$. Ponieważ

$$\chi(G') \leq \chi(G) + 1 = \omega + 1,$$

to wystarczy rozpatrzyć przypadek $\omega(G') = \omega$. Oznacza to, że x nie należy do żadnej kliki K_ω w G. Pomalujmy G przy pomocy optymalnej liczy kolorów ω. Niech X będzie zbiorem wszystkich wierzchołków o tym samym kolorze co x. Wtedy zbiór $X - x$ przecina wszystkie kliki K_ω w G. Zatem graf $H = G-(X-x)$ ma $\omega(H) \leq \omega-1$ i z doskonałości G, również $\chi(H) \leq \omega-1$. Ale zbiór $V(G'-H) = X-x+x'$ jest niezależny, więc $\chi(G') \leq \chi(H)+1 \leq \omega$. ■

Dowód Twierdzenia 20: Indukcja względem $|G|$. Załóżmy, że G jest doskonały i $|G| \geq 2$. Niech $\mathcal{K}$ będzie rodziną wszystkich podgrafów pełnych w grafie G (dokładniej, ich zbiorów wierzchołków). Niech, ponadto, $\alpha = \alpha(G)$, a $\mathcal{A}$ będzie rodziną wszystkich zbiorów niezależnych mocy α w G. Wystarczy pokazać, że $\chi(\bar{G}) \leq \omega(\bar{G})$ (dla właściwych podgrafów indukowanych wynika to z założenia indukcyjnego). Naszym celem jest znalezienie $K \in \mathcal{K}$ takiego, że $K \cap A \neq \emptyset$ dla każdego $A \in \mathcal{A}$. Wtedy bowiem

$$\chi(\bar{G}) \leq \chi(\bar{G} - K) + 1 = \omega(\bar{G} - K) + 1 = \alpha(G - K) + 1 \leq \alpha = \omega(\bar{G}).$$

Przypuśćmy nie wprost, że dla każdego $K \in \mathcal{K}$ istnieje $A = A_K \in \mathcal{A}$ takie, że $K \cap A_K = \emptyset$.

Zbudujmy nowy graf G' zastępując każdy wierzchołek x podgrafem pełnym $G_x = K_{k(x)}$, gdzie $k(x) = |\{K \in \mathcal{K} : x \in A_K\}|$, a każdą krawędź pomiędzy wierzchołkami x i y, podgrafem pełnym dwudzielnym $K_{k(x),k(y)}$.

Mamy $\alpha(G') \leq \alpha$. Zauważmy też, że G' jest wynikiem ciągu sklonowań wierzchołków, zaczynając od grafu $G[\{x \in V(G) : k(x) > 0\}]$, który, jako indukowany podgraf G jest doskonały. Zatem G', na podstawie Faktu 10, też powinien być doskonały. Tu jednak, poprzez dokładne szacowanie $\omega(G')$ i $\chi(G')$, otrzymamy sprzeczność.

Niech X' będzie kliką w G'. Wtedy, dla pewnego podgrafu pełnego $X \in \mathcal{K}$, $X' = G'[\bigcup_{x\in X} G_x]$. Stąd,

$$\omega(G') = \sum_{x\in X} k(x) \leq |\mathcal{K}| - 1,$$

ponieważ każda klika $K \in \mathcal{K}$ jest liczone w powyższej sumie co najwyżej raz, a X nie jest liczone wcale. Jest tak dlatego, że $|X \cap A_K| \leq 1$ oraz $|X \cap A_X| = 0$. Z drugiej strony,

$$|G'| = \sum_{x\in V(G)} k(x) = |\mathcal{K}|\alpha \geq |\mathcal{K}|\alpha(G')$$

i

$$\chi(G') \geq \frac{|G'|}{\alpha(G')} \geq |\mathcal{K}| > \omega(\mathcal{G}').$$

■

Poniższe twierdzenie łatwo implikuje Twierdzenie 20

Twierdzenie 21 (D 5.5.5, Lovász, 1972) *G jest doskonały wgdy*

$$|H| \leq \alpha(H)\omega(H)$$

dla każdego indukowanego podgrafu $H \subseteq G$.

Hipoteza 2 (Hipoteza o grafach doskonałych, Berge, 1966) *Graf G jest doskonały wgdy ani G ani G^c nie zawiera indukowanego cyklu o nieparzystej długości większej niż 3.*

To jest tzw. silna hipoteza Berge'a. Słabą nazywano Twiedzenie 20 zanim zostało udowodnione. Grafy, o których mowa w hipotezie Berge'a noszą nazwę grafów Berge'a. Wszystkie grafy doskonałe są grafami Berge'a, a hipoteza głosi, że jest też na odwrót. Niedawno, Chudnovski, Robertson, Seymour i Thomas udowodnili Hipotezę 2. Ich dowód liczy około 200 stron!