11 Minory

W tym rozdziale podamy warunki wymuszające istnienie minorów topologicznych TK_r i zwykłych MK_r. Najpierw przypomnijmy sobie to, co już wiemy.

Podpodział grafu. Podpodziałem grafu X nazywamy *każdy* graf Y otrzymany z X przez zastąpienie (niektórych) jego krawędzi niezależnymi ścieżkami. Piszemy wtedy $Y = TX$. UWAGA: TX to nie jeden graf lecz cała, nieskończona rodzina.

Topologiczny minor. Jeśli $Y = TX \subseteq G$, to mówimy, że X jest topologicznym minorem grafu G (X nie musi być podgrafem grafu G).

Przykład: $X = K_3$ jest topologicznym minorem grafu Petersena, bo jego podpodziałem jest $Y = C_5$, zawarty w grafie Petersena.

Wierzchołki główne i dodatkowe. Jeśli $Y = TX$ oraz $\delta(X) \geq 3$, to zbiór $V(X) \subseteq V(Y)$ nazywamy zbiorem wierzchołków głównych, a $V(Y) \setminus V(X)$ zbiorem wierzchołków pomocniczych. (Łatwo je odróżnić: te drugie mają stopień dwa.)

Klika topologiczna. Jeśli $X = K_r$, to każdy minor topologiczny $Y = TX \subseteq G$ nazywamy kliką topologiczną w G.

W rozdziale 6 udowodniliśmy następujący rezultat.

Lemat 3 (Mader 1967,{D 3.5.1}) *Istnieje funkcja h taka, że każdy graf G o średnim stopniu co najmniej $h(r)$ zawiera TK_r.*

Z dowodu wynika oszacowanie $h(r) \leq 2^{\binom{r}{2}}$. Jednak najmniejsza taka funkcja $h(r)$ jest rzędu r^2. Pokazali to, niezależnie, Bollobás, Thomason (1998) i Komlós, Szemerédi, (1996).

Twierdzenie 22 (D 7.2.1) *Istnieje c takie, że dla każdego r, jeśli $d(G) \geq cr^2$, to $G \supseteq TK_r$.*

W dowodzie wykorzystamy następujące twierdzenia. Niech $d(G)$ oznacza średni stopień wierzchołków w grafie G, a $\epsilon(G) = \frac{1}{2}d(G) = ||G||/|G|$.

Twierdzenie 23 (D 3.5.3, Thomas i Wollan 2005) *Jeśli G jest $2k$-spójny i $\epsilon(G) \geq 8k$, to G jest k-zwarty.* ■

Twierdzenie 24 (D 1.4.3, Mader 1972) *Każdy graf G o $d(G) \geq 4k$ ma $(k+1)$-spójny podgraf H o $\epsilon(H) > \epsilon(G) - k$.*

Dowód: Niech $\gamma := \epsilon(G) \geq 2k$ i rozważmy wszystkie podgrafy $G' \subseteq G$ takie, że

$$|G'| \geq 2k \qquad \text{i} \qquad ||G'|| > \gamma(|G| - k). \tag{3}$$

Ponieważ $d(G) \leq d(K_{|G|}) < |G|$, to G jest jednym z takich podgrafów. Niech H będzie takim podgrafem o najmniejszej liczbie $|H|$.

Zauważmy, że każdy graf G' spełniający (3) ma $|G'| > 2k$. Zatem, z minimalności H, mamy $\delta(H) > \gamma$, bo w przeciwnym razie H zawierałby podgraf właściwy spełniający (3). Stąd, $|H| \geq \gamma$ i dzieląc drugą nierówność w (3) dla H przez $|H|$ otrzymujemy, że $\epsilon(H) > \gamma - k$.

Pozostaje pokazać, że H jest $(k+1)$-spójny. Przypuśćmy nie wprost, że nie jest, to znaczy, że istnieje podział $V(H) = U_1 \cup U_2$, taki że nie ma krawędzi między $U_1 \setminus U_2$ a $U_2 \setminus U_1$, oba te zbiory są niepuste oraz $|U_1 \cap U_2| \leq k$. Niech $H_i = H[U_i]$, $i = 1, 2$. Ponieważ dla każdego $v \in U_1 \setminus U_2$ mamy $d_{H_i}(v) = d_H(v) \geq \delta(H) > \gamma \geq 2k$, to $|H_i| > 2k$. Zatem, z minimalności H, $||H_i|| \leq \gamma(|H_i| - k)$. Wtedy jednak

$$||H|| \leq ||H_1|| + ||H_2|| \leq \gamma(|H_1| + |H_2| - 2k) \leq \gamma(|H| - k)$$

– sprzeczność. ■

Dowód Twierdzenia 22: Niech $d(G) \geq 10r^2$. Na podstawie Tw. 24 z $k = r^2$, G ma r^2-spójny podgraf H, gdzie $\epsilon(H) \geq 4r^2$. Na podstawie Tw. 23 z $k = r(r-1)$ H jest $\binom{r}{2}$-zwarty. Ponieważ $\delta(H) \geq \kappa(H) \geq r^2$, można wybrać r wierzchołków $v_1, \ldots, v_r$ i dla każdego z v_i zbiór $r-1$ jego sąsiadów u_i^j, gdzie $1 \leq j \leq r$, $j \neq i$, tak, że wszystkie r^2 wierzchołki są różne. Teraz połączmy wierzchołki u_i^j w $\binom{r}{2}$ par postaci u_i^j, u_j^i i zastosujmy $\binom{r}{2}$-zwartość. Otrzymane rozłaczne ścieżki tworzą wraz z wierzchołkami bazowymi v_i topologiczną klikę TK_r. ■

Dla danym grafw X i G, piszemy $G = MX$, gdy $V(G) = \bigcup_{x \in V(X)} V_x$, V_x są parami rozłączne, dla każdego $x \in V(X)$ indukowany podgraf $G[V_x]$ jest spójny i dla każdej pary $x, y \in V(X)$ istnieje krawędź pomiędzy V_x i V_y wgdy $xy \in E(X)$. Innymi słowy, X powstaje z G przez ściągnięcie zbiorów V_x i usunięcie krawędzi równoległych. Jeśli $G = MX$ i $G \subseteq Y$, to X nazywamy minorem grafu Y. Dla zwykłych minorów MK_r próg na gęstość $d(G)$ gwarantujący istnienie MK_r w G jest trochę niższy niż w przypadku klik topologicznych TK_r.

Twierdzenie 25 (D 7.2.2, Kostochka 1982,) *Istnieje c takie, że dla każdego r, jeśli* $d(G) \geq cr\sqrt{\log r}$*, to* $G \supseteq MK_r$*.*

Hipoteza Hadwigera. Ponieważ $\chi(G) \leq \max_{H \subseteq G} \delta(H) + 1$, duża liczba chromatyczna wymusza podgraf o dużym minimalnym, a więc i średnim stopniu. Zatem w powyższych twierdzeniach 22 i 25 można zastąpić $d(G)$ przez $\chi(G)$. Hipoteza Hadwigera (1943) mówi, że już warunek $\chi(G) \geq r$ wymusza istnienie w G minora MK_r. Mocniejsza hipoteza Hajosa (1961), głosząca, że ten sam warunek wymusza topologiczny minor TK_r została zdruzgotana w 1979 roku za sprawą Catlina, Erdősa i Fajtlowicza, o czym można się więcej dowiedzieć z książeczki ,,Niekonstruktywne..." (Palka, Ruciński, 1996).

Hipoteza Hadwigera jest trywialna dla $r \leq 3$, łatwa dla $r = 4$, potwierdzona dla $r = 5$ i $r = 6$. Z jej prawdziwości dla $r = 5$ wynika natychmiast Hipoteza 4 Kolorów.