6 „Linking”

Definicja grafu *k-zwartego (ang.: k-linked)*. Graf G nazywamy k-zwartym, gdy $|G| \geq 2k$ oraz, dla każdego ciągu różnych $2k$ wierzchołków $s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k$, istnieje k rozłącznych ścieżek $P_1, \ldots, P_k$, gdzie P_i jest $s_i - t_i$ ścieżką, $i = 1, \ldots, k$. Jest to własność mocniejsza od k-spójności.

Twierdzenie 10 (Jung 1970; Larman & Mani, 1970, {D 3.5.2}) *Istnieje funkcja f taka, że dla każdego k, każdy $f(k)$-spójny graf jest k-zwarty.*

W dowodzie Tw. 10 jako lemat wykorzystuje się inne twierdzenie o zawieraniu klik topologicznych, które trzeba poprzedzić serią definicji:

Podpodział grafu. Podpodziałem grafu X nazywamy *każdy* graf Y otrzymany z X przez zastąpienie (niektórych) jego krawędzi niezależnymi ścieżkami. Piszemy wtedy $Y = TX$. UWAGA: TX to nie jeden graf lecz cała, nieskończona rodzina.

Topologiczny minor. Jeśli $Y = TX \subseteq G$, to mówimy, że X jest topologicznym minorem grafu G (X nie musi być podgrafem grafu G).

Przykład: $X = K_3$ jest topologicznym minorem grafu Petersena, bo jego podpodziałem jest $Y = C_5$, zawarty w grafie Petersena.

Wierzchołki główne i dodatkowe. Jeśli $Y = TX$ oraz $\delta(X) \geq 3$, to zbiór $V(X) \subseteq V(Y)$ nazywamy zbiorem wierzchołków głównych, a $V(Y) \setminus V(X)$ zbiorem wierzchołków pomocniczych. (Łatwo je odróżnić: te drugie mają stopień dwa.)

Klika topologiczna. Jeśli $X = K_r$, to każdy minor topologiczny $Y = TX \subseteq G$ nazywamy kliką topologiczną w G.

Ściągnięcie (kontrakcja) podzbioru wierzchołków. To operacja polegająca na zastąpieniu podzbioru wierzchołków $U \subseteq V(G)$ jednym, nowym wierzchołkiem v_U, zachowując wszystkie krawędzie biegnące w G z U na zewnątrz (usuwając jednak krawędzie równoległe). Nowy graf oznaczamy przez $G|U$.

Lemat 3 (Mader 1967,{D 3.5.1}) *Istnieje funkcja h taka, że każdy graf G o średnim stopniu co najmniej $h(r)$ zawiera TK^r.*

Dowód: Dla $r \leq 2$ jest to prawdą, nawet biorąc $h(r) = 1$. Załóżmy więc, że $r \geq 3$. Pokażemy indukcją względem $m = r, \ldots, \binom{r}{2}$, że każdy graf spójny G o średnim stopniu $d(G) \geq 2^m$ zawiera topologiczny minor TX jakiegoś grafu X o $|X| = r$ i $||X|| = m$. Dla $m = \binom{r}{2}$, otrzymamy tezę twierdzenia z $h(r) = 2^{\binom{r}{2}}$.

Przypadek $m = r$ jest łatwy. Na podstawie Faktu 5 poniżej, G zawiera podgraf H o minimalnym stopniu 2^{r-1}, więc zawiera cykl długości co najmniej $2^{r-1} + 1 > r$. Każdy taki cykl jest minorem topologicznym cyklu C_r, który jest szukanym grafem X.

Załóżmy teraz, że $r < m \le \binom{r}{2}$, G jest spójny, $d(G) \ge 2^m$. Niech U będzie maksymalnym podzbiorem zbioru $V(G)$ takim, że $G[U]$ jest spójny oraz $d(G|U) \ge 2^m$. (U istnieje, bo dla każdego $v \in V(G)$, mamy $G|\{v\} = G$.) Zauważmy, że $U \ne V(G)$, bo wtedy $d(G|U) = d(K_1) = 0$.

Niech $H = G[N(U)]$, gdzie $N(U) = N_G(U) \setminus U$ jest (niepustym) zbiorem sąsiadów wierzchołków z U, którzy nie należą do U. Gdyby $\delta(H) < 2^{m-1}$, to można by powiększyć zbiór U, dodając do niego wierzchołek v o minimalnym stopniu w H. Wtedy $d(G|U \cup \{v\}) \ge 2^m$ – sprzeczność z maksymalnością U (podgraf $G|U \cup \{v\}$ jest spójny).

Zatem $d(H) \ge \delta(H) \ge 2^{m-1}$ i z założenia indukcyjnego, $H \supseteq TZ$, gdzie $|Z| = r$, $||Z|| = m - 1$. Niech x, y będą wierzchołkami głównymi TZ, nie połączonymi krawędzią w Z. Ponieważ $x, y \in N(U)$ oraz $G[U]$ jest spójny, to istnieje $x - y$ ścieżka w G o wszystkich wierzchołkach wewnętrznych w U, czyli poza H. Dodając ją do TZ otrzymujemy minor topologiczny TX, gdzie $X = Z \cup \{xy\}$. ■

Fakt 5 ({D 1.2.2}) *Każdy graf G o $||G|| \ge 1$ ma podgraf H taki, że*

$$\delta(H) > \frac{1}{2}d(H) \ge \frac{1}{2}d(G)$$

Dowód Twierdzenia 10: Twierdzenie udowodnimy z $f(k) = h(3k) + 2k$, gdzie h jest funkcją z Lematu 3. Niech G będzie grafem $f(k)$-spójnym. Wtedy

$$d(G) \ge \delta(G) \ge \kappa(G) \ge h(3k).$$

Niech $K = TK_{3k}$ będzie topologiczną kliką rzędu $3k$ w G, gwarantowaną przez Lemat 3, i niech U będzie zbiorem jej $3k$ wierzchołków węzłowych.

Niech $A = \{s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k\}$ będzie zbiorem różnych wierzchołków w G. Ponieważ $\kappa(G) \ge 2k$, to na podstawie Tw. Mengera istnieje rodzina $\mathcal{R}$ złożona z $2k$ rozłącznych A–U ścieżek. Wybierzmy ją tak, by zminimalizować liczbę

$$|\bigcup_{R \in \mathcal{R}} E(R) \setminus E(K)\,| \,.$$

Niech

$$\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_k, Q_1, \ldots, Q_k\},$$

gdzie P_i ma koniec w s_i, a Q_i – w t_i, $i = 1, \ldots, k$. Oznaczmy ich drugie końce (te w U) przez s^i, t^i, odpowiednio, a pozostałe wierzchołki w U przez $u_1, \ldots, u_k$.

Niech L_i będzie U-ścieżką łączącą u_i z s^i w K. Niech v_i będzie wierzchołkiem L_i, najbliższym u_i, leżącym na jakiejkolwiek ścieżce R z $\mathcal{R}$. Z minimalności $\mathcal{R}$, R musi się pokrywać z L_i na odcinku zaczynającym się w v_i (a kończącym w s^i). Stąd, $R = P_i$. Podobnie, oznaczając przez M_i U-ścieżkę łączącą u_i z t^i w K, a przez w_i wierzchołek M_i, najbliższy u_i, leżący na jakiejkolwiek ścieżce R z $\mathcal{R}$, wnioskujemy, że tą ścieżką jest Q_i. Zatem ścieżki $s_i P_i v_i L_i u_i M_i w_i Q_i t_i$, $i = 1, \ldots, k$, są rozłączne (rysunek!). ■

Bollobás i Thomason pokazali w r. 1996, że można przyjąć $f(k) = 22k$. Thomas i Wollan w r. 2005 poprawili to oszacowanie do $f(k) = 16k$, bo pokazali, że każdy $2k$-spójny graf o średnim stopniu co najmniej $16k$ jest k-zwarty.