9 Kolorowanie z list

Kolorowanie z list jest uogólnienien zwykłego kolorowania. Dane są graf G i rodzina zbiorów (list) kolorów $(S_v)_{v\in V(G)}$. Kolorowanie właściwe

$$c : V(G) \to \bigcup S_v$$

nazywamy *kolorowaniem z list* (S_v), gdy $c(v) \in S_v$ dla każdego $v \in V(G)$. Graf G jest *k-wybieralny*, gdy dla każdej rodziny list (S_v) takiej, że $|S_v| = k$, $v \in V(G)$, G jest kolorowalny z tych list. Najmniejsze k takie, że G jest k-wybieralny nazywamy *liczbą wyboru grafu G* i oznaczamy przez $ch(G)$. W przypadku kolorowania krawędzi, analogicznie definiuje się indeks wyboru $ch'(G)$.

Jeśli ograniczymy się do rodzin identycznych list $S_v = \{1, \ldots, k\}$, to otrzymujemy definicję zwykłej liczby chromatycznej $\chi(G)$ i indeksu chromatycznego $\chi'(G)$. Zatem

$$ch(G) \geq \chi(G) \quad \text{oraz} \quad ch'(G) \geq \chi'(G).$$

Istnieją grafy 2-dzielne (o liczbie chromatycznej 2), których liczba wyboru wynosi n (ćw.). Natomiast nie wiadomo czy istnieje graf G, dla którego $ch'(G) > \chi'(G)$.

Hipoteza 1 *Dla każdego grafu G, $ch'(G) = \chi'(G)$.*

Wracając do kolorowania wierzchołków, Voigt skonstruował w 1993 roku graf planarny na 238 wierzchołkach, który nie jest 4-wybieralny. (Słuchacze wykładów w sezonie 2000 znaleźli taki graf na 86 wierzchołkach.) Rok pózniej Thomassen pokazał, że, w przypadku grafów planarnych, listy długości 5 zawsze wystarczą, dostarczając tym samym nowego dowodu Twierdzenia o 5 kolorach (D 5.1.2).

Twierdzenie 18 (Thomassen 1994, D 5.4.2) *Każdy graf planarny jest 5-wybieralny.*

Dowód: Udowodnimy, przez indukcję względem $|G|$, fakt trochę mocniejszy.

Mocniejszy Fakt: *Niech ściana zewnętrzna płaskiego grafu G jest otoczona cyklem $C = \{v_1, \ldots, v_k\}$ a wszystkie ściany wewnętrzne są trójkątami. Niech, ponadto, $S_{v_1} = \{1\}$, $S_{v_2} = \{2\}$, $|S_v| \geq 3$ dla wszystkich pozostałych* *wierzchołków cyklu C, a $|S_v| \geq 5$ dla wszystkich wierzchołków wewnętrznych. Wtedy G ma kolorowanie z list (S_v).*

MF natychmiast implikuje Twierdzenie. Rzeczywiście, możemy założyć, że G jest maksymalnie płaski, a więc jest triangulacją. Niech v_1, v_2, v_3 będą wierzchołkami ściany zewnętrznej. Pomalujmy v_1 i v_2 dowolnie dwoma różnymi kolorami z ich list. Na podstawie **MF** można to kolorowanie dokończyć.

MF dowodzimy przez indukcję. Dla $|G| = 3$ jest to fakt oczywisty. Załóżmy, że $|G| \geq 4$ i że **MF** zachodzi dla wszystkich grafów płaskich mniejszych niż G.

Przypadek I. C ma przekątną vw. Ta przekątna dzieli C na dwa mniejsze cykle C_1 i C_2. Przyjmijmy, że $v_1, v_2 \in C_1$. Niech G_1 i G_2 będą grafami otoczonymi, odpowiednio, cyklami C_1 i C_2. Stosujemy założenie indukcyjne najpierw do G_1, a następnie z v i w w roli v_1 i v_2, do G_2.

Przypadek II. C nie ma przekątnej. Niech $u_1, \ldots, u_m$ będą różnymi od v_1 i v_{k-1} sąsiadami v_k w G. Ponieważ nie ma przekątnych, to $m \geq 1$, a ponieważ wewnątrz jest triangulacja, to ścieżka $v_{k-1}, u_m, \ldots, u_1, v_1$ jest fragmentem ściany zewnętrznej grafu $G - v_k$. Niech $l, j \in S_{v_k} - \{1\}$, $j \neq l$. Usuńmy kolory j i l ze wszystkich list S_{u_j}, $j = 1, \ldots, m$, i zastosujmy **MF** do $G - v_k$. Jeden z kolorów j lub l pozostanie na pewno wolny dla v_k. ■

Teraz naszym celem będzie udowodnienie Hipotezy 1 dla grafów dwudzielnych. Do tego będzie nam potrzebne pojęcie jądra grafu skierowanego D. Zbiór niezależny $U \subseteq V(D)$ nazywamy jądrem digrafu D, gdy dla każdego $v \in V(D) \setminus U$ istnieje $u \in U$ taki, że $vu \in E(D)$.

Lemat 8 (D 5.4.3) *Niech dane będą graf H i listy kolorów $(S_v)_{v \in V(H)}$. Jeśli istnieje orientacja D grafu H taka, że dla każdego $v \in V(H)$ mamy $d^+(v) < |S_v|$, oraz każdy indukowany podgraf D' grafu D ma jądro, to H może być pomalowany z list $(S_v)_{v \in V(H)}$.*

Uwaga. Ten lemat ma swoje korzenie (przynajmniej intuicyjnie) w zachłannym algorytmie kolorowania, który działa następująco. Uporządkujmy wierzchołki liniowo $v_1, \ldots, v_n$ tak by każdy v_i miał mniej niż $|S_{v_i}|$ sąsiadów pośród $v_1, \ldots, v_{i-1}$; jeśli to możliwe, to oczywiście można pomalować wierzchołki kolejno, używając zawsze kolorów z ich list. Zauważmy, że orientując krawędzie od v_i do v_j gdy $i > j$, otrzymujemy orientację spełniającą warunek $d^+(v) < |S_v|$; co więcej, pierwszy kolor indukuje jądro, a każdy następny też jest jądrem w podgrafie otrzymanym po usunięciu wierzchołków uprzednio pomalowanych.

Dowód: Indukcja względem $|H|$. Dla $|H| = 1$, warunek $d^+(v) < |S_v|$ implikuje, że S_v nie jest pusta, a więc można pomalować jedyny wierzchołek grafu H. Niech teraz $|H| > 1$ i załóżmy prawdziwość lematu dla wszystkich grafów o mniej niż $|H|$ wierchołkach.

Niech α będzie dowolnym kolorem występującym w $\bigcup S_v$, i niech D będzie taką orientacją H jak w założeniach lematu. Niech $V_\alpha = \{v : \alpha \in S_v\}$ i $D_\alpha = D[V_\alpha]$. Podgraf D_α ma jądro U_α.

Pomalujmy U_α kolorem α i usuńmy α ze wszystkich list. Digraf $D - U_\alpha$ nadal będzie spełniać warunek $d^+(v) < |S_v|$, bo jeśli prawa strona zmalała o 1, to $v \in D_\alpha$, a zatem i lewa strona zmalała o 1, bo odpadł sąsiad z jądra. Zatem $H - U_\alpha$ spełnia założenia lematu i na podstawie założenia indukcyjnego można go pomalować z list bez koloru α, co w efekcie daje kolorowanie całego H z wyjściowych list. ■

Twierdzenie 19 (Galvin, 1995, D 5.4.4) *Dla każdego dwudzielnego grafu G*

$$ch'(G) = \chi'(G) \quad (= \Delta G)).$$

Uwaga. Jest to uogólnione rozwiązanie problemu istnienia częściowego kwadratu łacińskiego, czyli pytania czy $ch'(K_{n,n}) = n$. Przeczytaj artykuł "Quite easily done" na ten temat.

Dowód: Niech G będzie grafem dwudzielnym o dwupodziale (X, Y). Oznaczmy przez k jego indeks chromatyczny i niech $c : E(G) \to \{1, \ldots, k\}$ będzie właściwym kolorowaniem krawędzi. Ponieważ zawsze

$$ch'(G) \geq \chi'(G) = k,$$

więc pokażemy, że $ch'(G) \leq k$. Skorzystamy przy tym z tożsamości $ch'(G) = ch(L(G))$, gdzie $L(G)$ jest grafem krawędziowym grafu G.

Oznaczmy dla wygody $H = L(G)$ i wprowadźmy orientację krawędzi H. Dla $ee' \in E(H)$ ustalamy $ee' \in E(D)$, gdy $e \cap e' \in X$ i $c(e) > c(e')$ lub $e \cap e' \in Y$ i $c(e) < c(e')$. Łatwo się przekonać, że $d^+(e) < k$ (jeśli $c(e) = i$, to e może wypuszczać strzałkę do co najwyżej $i - 1$ krawędzi e', z którymi spotyka się w X i nie więcej niż do $k - i$ krawędzi e' z którymi spotyka się w Y).

Zatem pozostaje pokazać, że każdy indukowany podgraf D' ma jądro. Zastosujemy indukcję względem $|D'|$. Niech $E' = V(D') \subseteq E(G)$. Dla każdego $x \in X$ incydentnego z przynajmniej jedną krawędzią ze zbioru E'

wybieramy spośród nich krawędź o najmniejszej wartości $c(e)$ i oznaczamy ją przez e_x.

Twierdzimy, że zbiór U wszystkich krawędzi e_x jest jądrem podgrafu D'. Jedno jest pewne: dla każdej $e' \in E' \setminus U$ mamy $e'e \in D$. Trzeba więc tylko pokazać, że U jest zbiorem niezależnym. Przypuśćmy nie wprost, że $e, e' \in U$ i $ee' \in D'$. Powiedzmy, że $c(e) < c(e')$. Zatem z definicji orientacji D, e i e' spotykają się w Y.

Z założenia indukcyjnego $D' - e$ ma jądro U'. Jeśli $e' \in U'$, to U' jest też jądrem D'. Jeśli $e' \notin U'$, to z definicji jądra istnieje $e" \in U'$ takie, że $e'e" \in D'$. Zastanówmy się, gdzie mogą spotykać się e' i $e"$. Gdyby w X, to $c(e") < c(e')$ – sprzeczność z zaliczeniem e' do U. Zatem w Y, co znaczy, że $c(e') < c(e")$, a więc i $c(e) < c(e")$, czyli, że $ee" \in D'$. Oznacza to jednak, że i tym razem U' jest jądrem całego D'. ■

10 Grafy doskonałe

11 Minory

12 Lemat Szemerédiego

13 Zastosowania Lematu Szemerédiego

13.1 Twierdzenie Erdősa-Stone'a

13.2 Krawędziowe liczby Ramseya