TEORIA GRAFÓW 2 (2006)– ZADANIA

June 1, 2006

Zadanie 1 (RW) *Udowodnić, że każdy k-regularny graf 2-dzielny ma skojarzenie doskonałe, a więc i 1-faktoryzację, tzn. rozkład zbioru krawędzi na k rozłącznych skojarzeń doskonałych.*

Zadanie 2 (PM) *Wykazać, że graf Petersena nie ma 1-faktoryzacji.*

Zadanie 3 (PWr) *Udowodnić, że każdy $2k$-regularny graf posiada 2-faktoryzację.*

Zadanie 4 (PWr) *Udowodnić, że jeśli w grafie 2-dzielnym G dla każdego $S \subseteq V_1$ mamy $|N(S)| \geq |S| - d$, to G ma skojarzenie nasycające wszystkie oprócz co najwyżej d wierzchołków zbioru V_1.*

Zadanie 5 (RW) *Dla dowolnej liczby naturalnej k, pokazać, że każde dwa podziały skończonego zbioru na podzbiory mocy k mają wspólny system różnych reprezentantów.*

Zadanie 6 (PWa) *Każdy 3-regularny graf bez mostów ma 1-faktor. Uogólnić na dowolne $k \geq 3$ (k-regularność i brak cięć krawędziowych mocy $k-2$).*

Zadanie 7 (PWr) *Pokazać, że*

$$\beta(G) \geq \frac{|E(G)|}{2\Delta(G) - 1}.$$

(Tutaj $\beta(G)$ – moc największego skojarzenia.)

Zadanie 8 (MS) *Niech M będzie skojarzeniem w G a $k \geq 1$. Jeśli w G nie ma ścieżek rozszerzających ("augmenting") M długości nie większej niż $2k-1$, to*

$$|M| \geq \frac{k}{k+1}\beta(G).$$

Zadanie 9 (PWa) *Udowodnić, że w dowolnym grafie* $\gamma(G) \leq 2\beta(G)$*, jak również* $\gamma(G) = n - \alpha(G)$*. (Tutaj* $\beta(G)$ *– moc największego skojarzenia,* $\gamma(G)$ *– moc najmniejszego pokrycia krawędzi wierzchołkami.)*

Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną grafów. $\mathcal{F}$*-pokryciem* grafu G nazywamy rozpięty podgraf grafu G, którego każda składowa jest izomorficzna z jakimś grafem z rodziny $\mathcal{F}$. Moc pokrycia mierzymy liczbą składowych.

Zadanie 10 (DP) *W każdym grafie* G *istnieje pokrycie co najwyżej* $\alpha(G)$ *ścieżkami. (Tutaj* $\mathcal{F}$ *jest rodziną wszystkich ścieżek.)*

Zadanie 11 (DP) *Niech* $\mathcal{C} = \{K_1.K_2, C_3, C_4, ...\}$*. W każdym grafie* G *istnieje* $\mathcal{F}$*-pokrycie mocy co najwyżej* $\alpha(G)$*.*

Zadanie 12 (MS) *Udowodnić, że w każdym zbiorze częściowo uporządkowanym* P*, minimalna liczba łańcuchów pokrywających* P *równa się maksymalnej mocy antyłańcucha. [Tw. Dilwortha]*

Zadanie 13 (PWa) *Sformułować i udowodnić tw. dualne do Tw. Dilwortha.*

Zadanie 14 (PM) *Wywnioskować Tw. Halla z Tw. Gallai'a-Milgrama*

Zadanie 15 (RW) *Wywnioskować z Tw. Gallai'a-Milgrama, że każdy turniej posiada ścieżkę Hamiltona.*

Zadanie 16 (PWr) *Wywnioskować Tw. Königa z Tw. Dilwortha.*

Zadanie 17 (MM) *Pokazać, że każdy graf zawiera cykl długości większej niż* $\delta(G)$ *(o ile* $\delta(G) \geq 2$*).*

Zadanie 18 (DP) *Jeśli* G *jest spójny, to każde dwie najdłuższe ścieżki mają wspólny wierzchołek.*

Zadanie 19 (MS) *Jeśli spójny graf ma co najmniej* $2k+1$ *wierzchołków i minimalny stopień co najmniej* k *(*$k \geq 1$*), to zawiera ścieżkę długości* $2k$*.*

Zadanie 20 (PM) *Pokazać, że jeśli graf nie ma zbioru niezależnego mocy 3 to ma cykl długości co najmniej* $n/2$*, gdzie* $n \geq 5$ *jest liczbą wierzchołków.*

Zadanie 21 (MM) *Udowodnić, że dla grafów spójnych*

$$diam(G) < \frac{3|V(G)|}{\delta(G)}.$$

(Tutaj $diam(G)$ oznacza średnicę grafu, to znaczy maksymalną odległość wierzchołków, a ta z kolei, to długość najkrótszej ścieżki.)

Zadanie 22 (RW) *Jeśli $\delta(G) \geq 3$, to*

(i) G zawiera parzysty cykl;

(ii) największy wspólny dzielnik długości wszystkich cykli w G jest nie większy niż 2.

Zadanie 23 (PWr) *Diestel 2.8*

Zadanie 24 (RW) *Diestel 2.13*

Zadanie 25 (MM) *Diestel 2.15*

Zadanie 26 (RW) *Diestel 2.17*

Zadanie 27 (PWr) *Diestel 2.18*

Zadanie 28 (DP) *Diestel 2.24*

Graf bloków grafu G to graf 2-dzielny $(W, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ gdzie W – zbiór wierzchołków cięcia grafu G, $\mathcal{B}$ – zbiór bloków grafu G, a dla $w \in W$ i $B \in \mathcal{B}$, $wB \in F$ wgdy $w \in V(B)$.

Zadanie 29 (MM) *Udowodnić, że graf bloków grafu spójnego jest drzewem.*

Zadanie 30 (DP) *Udowodnić, że jeśli graf G można skonstruować zaczynając od cyklu i kolejno dodając H-ścieżki do aktualnego grafu H, to G jest 2-spójny.*

Zadanie 31 (DLA WSZYSTKICH) *Pokazać, że żaden graf nie ma więcej niż $\binom{n}{2}$ minimalnych cięć krawędziowych. Znaleźć grafy osiągające to oszacowanie.*

Zbiór $U \subseteq V(G)$ nazywamy *dominującym*, gdy $V(G) = U \cup N_G(U)$. Mówimy, że dwupodział $V(G) = V_1 \cup V_2$ *rozdziela* zbiór U, gdy istnieją $v_1, v_2 \in U$ takie, że $v_i \in V_i$ dla $i = 1, 2$.

Zadanie 32 (PM) *Pokazać, że dla każdego zbioru dominującego U, każdy dwupodział $V(G) = V_1 \cup V_2$, gdzie $V_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$, i $e(V_1, V_2) < \delta_G$, rozdziela U.*

Zadanie 33 (MS) *Wywnioskować Tw. Königa z Tw. Mengera.*

Zbiór $a - B$ ścieżek nazywamy wachlarzem (fan) jeśli każde dwie z nich mają tylko 1 wspólny wierzchołek (a).

Zadanie 34 (MM) *Udowodnić, że dla $B \subset V$ i $a \in V \backslash B$, minimalna liczba wierzchołków rozdzielających a od B i różnych od a jest równa maksymalnej mocy $a - B$ wachlarza.*

Zadanie 35 (PM) *Niech a i b będą różnymi wierzchołkami w G. Jeśli $ab \notin E$, to minimalna liczba wierzchołków rozdzielających a od b, ale różnych od a i b, jest równa maksymalnej liczbie niezależnych $a - b$ ścieżek.*

Zadanie 36 (RW) *Niech a i b będą różnymi wierzchołkami w G. Minimalna liczba krawędzi rozdzielających a od b jest równa maksymalnej liczbie krawędziowo rozłącznych $a - b$ ścieżek.*

Zadanie 37 (PWr) *G jest krawędziowo k-spójny wgdy zawiera k krawędziowo rozłącznych ścieżek pomiędzy każdą parą różnych wierzchołków.*

Zadanie 38 (DP) *Jeśli G jest 2-spójny, $G \neq K^3$, to dla każdej krawędzi e, $G - e$ lub $G|e$ jest też 2-spójny.*

Zadanie 39 (MS) *Jeśli G jest 3-spójny, $xy \in E$, to $G|xy$ jest 3-spójny wgdy $G - \{x, y\}$ jest 2-spójny.*

Zadanie 40 (PWa) *G jest 3-spójny i 3-regularny wgdy można go otrzymać z K^4 w wyniku ciągu operacji polegających na postawieniu po 1 nowym wierzchołku na dwóch krawędziach i połaczeniu nowych wierzchołków ze sobą.*

Zadanie 41 (PWa) *Jeśli G jest k-spójny, $k \geq 2$ i $|G| \geq 2k$, to G zawiera cykl długości co najmniej $2k$.*

Zadanie 42 (PWa) *Jeśli G jest k-spójny, $k \geq 2$, to każde k wierzchołków leży na cyklu.*

Zadanie 43 (PM) *Jeśli G jest spójny, k-regularny i 2-dzielny, to jest 2-spójny.*

Graf skierowany jest *silnie spójny* jeśli dla każdej uporządkowanej pary wierzchołków (a, b) istnieje skierowana $a - b$ ścieżka.

Zadanie 44 (RW) *Jeśli można rozspójnić silnie spójny graf usuwając co najwyżej k krawędzi, to można go też rozspójnić odwracając kierunki co najwyżej k krawędzi.*

Zadanie 45 (PWr) *Graf G można zorientować tak, by otrzymany graf skierowany był silnie spójny wgdy G jest krawędziowo 2-spójny.*

Zadanie 46 (MM) *Turniej jest silnie spójny wgdy jest hamiltonowski.*

Zadanie 47 (MS) *Dla $n \geq 3$, niech $G_n = K_n - \lfloor n/2 \rfloor K_2$, tzn. G_n jest otrzymany z grafu pełnego przez usunięcie największego skojarzenia. Obliczyć $\kappa(G_n)$.*

Graf G nazywamy k-zwartym, gdy $|G| \geq 2k$ oraz, dla każdego ciągu różnych $2k$ wierzchołków $s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k$, istnieje k rozłącznych ścieżek $P_1, \ldots, P_k$, gdzie P_i jest $s_i - t_i$ ścieżką, $i = 1, \ldots, k$.

Zadanie 48 (DP) *Pokazać, że każdy k-zwarty graf jest $(2k - 1)$-spójny, i że odwrotnie być nie musi.*

Zadanie 49 (PWa) *Każdy graf G o $||G|| \geq 1$ ma podgraf H taki, że*

$$\delta(H) > \frac{1}{2}d(H) \geq \frac{1}{2}d(G)$$

Zadanie 50 (RW) *Pokazać, że lesistość grafu dana jest wzorem*

$$\left\lceil \max_{H \subseteq G} \frac{||H||}{|H| - 1} \right\rceil$$

Zadanie 51 (MS) *Wyznaczyć lesistość grafów K_n i $K_{n,m}$ oraz skonstruować optymalne podziały na lasy dla K_n i $K_{4,4}$.*

Zadanie 52 (MS) *Wyznaczyć lesistość grafów k-regularnych oraz wskazać optymalny podział grafu Petersena.*

Liniową lesistość definiuje się tak samo jak zwykłą, ale wymaga się, by każda składowa każdego lasu była ścieżką.

Zadanie 53 (MM) *Korzystając z podziału grafu pełnego na cykle Hamiltona, wykazać, że liniowa lesistość i lesistość grafu pełnego pokrywają się.*

Istnieje hipoteza, że liniowa lesistość i lesistość pokrywają się dla każdego grafu regularnego. Hipoteza ta pozostaje otwarta, choć wykazano ją już dla grafów k-regularnych, $k \leq 10$. Dla $k = 2$ jest trywialna. Dla $k = 3$ już nie.

Zadanie 54 (PWr) *Korzystając z Tw. Eulera pokazać, że z prawdziwości hipotezy dla $k = 3$ wynika jej prawdziwość dla $k = 6$, dla grafów o parzystej liczbie krawędzi.*

Zadanie 55 (PM) *Korzystając z Tw. Eulera i Tw. Petersena pokazać, że z prawdziwości hipotezy dla $k = 5$ i pewnego nieparzystego $r \geq 5$, wynika jej prawdziwość dla $k = r + 5$, dla grafów o parzystej liczbie krawędzi.*

Zadanie 56 (MM) *Pokazać, że dla drzewa o maksymalnym stopniu* Δ*, jego liniowa lesistość wynosi* $\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$.

Zadanie 57 (MM) *Pokazać, że każdy* TX *jest również* MX *oraz, że przy* $\Delta(X) \leq 3$*, każdy* MX *zawiera* TX.

Zadanie 58 (PM) *Wywnioskować Wniosek 8.*

Zadanie 59 (RW) *Pokazać, że w przestrzeni* $\mathcal{E}$*, iloczyn skalarny* $< F, F' >= 0$ *wgdy* $|F \cap F'|$ *jest liczbą parzystą.*

Zadanie 60 (PWr) $F \in \mathcal{C}$ *wgdy wszystkie stopnie w* (V, F) *są parzyste.*

Zadanie 61 (PWa) $F \in \mathcal{C}$ *wgdy* F *jest sumą krawędziowo rozłącznych cykli.*

Zadanie 62 (DP) $\mathcal{C}$ *jest generowana przez indukowane cykle, tzn. ma bazę, ktorej elementami są wyłącznie indukowane cykle grafu* G.

Zadanie 63 (PM) *(a)* K_4 *spełnia Tw. 15*

(b) Jeśli G *jest 3-spójny, a* e *taką krawędzią, że* $G|e$ *też jest 3-spójny, to żaden trójkąt zawierający* e *nie jest rozdzielający.*

Cięciem (krawędziowym) nazywamy zbiór krawędzi postaci $E(V_1, V_2)$, gdzie $V(G) = V_1 \cup V_2$, tzn. zbiór wszystkich krawędzi o jednym końcu w V_1 a drugim w V_2. Dla $v \in V(G)$, oznaczmy $E(v) = E(v, V(G) - v)$. Niech $\mathcal{C}^*$ będzie zbiorem wszystkich cięć grafu G.

Zadanie 64 (DP) *(a)* $\mathcal{C}^*$ *jest podprzestrzenią liniową przestrzeni* $\mathcal{E}$*;*

(b) $\mathcal{C}^*$ *jest generowana przez* $\{E(v) : v \in V\}$.

Zadanie 65 (MS) *Wskazać bazę w* $\mathcal{C}^*$.

Przypomnijmy, że przestrzeń ortogonalna względem danej podprzestrzeni $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ to $\mathcal{F}^{ort} = \{D : \ < F, D >= 0 \qquad \forall \quad F \in \mathcal{F}\}$.

Zadanie 66 (PWr) *Pokazać, że przestrzenie* $\mathcal{C}$ *i* $\mathcal{C}^*$ *są wzajemnie ortogonalne.*

Zadanie 67 (PWa) *Wyznaczyć wymiary* $\mathcal{C}$ *i* $\mathcal{C}^*$ *poprzez* $n = |G|$ *i* $m = ||G||$*, gdy* G *jest spójny.*

Zadanie 68 (PM) *W 2-spójnym grafie płaskim każda ściana jest ograniczona cyklem.*

Zadanie 69 (MS) *W 2-spójnym grafie płaskim wszystkie skończone ściany tworzą bazę przestrzeni* $\mathcal{C}$. *(2 dowody: 1. opiera się na wzorze Eulera, 2. - nie.)*

Zadanie 70 (RW) *Korzystając ze wzoru Eulera pokazać, że ani* K^5 *ani* $K_{3,3}$ *nie jest planarny.*

Zadanie 71 (MM) *Pokazać 2 sposobami (Euler i Kuratowski), że graf Petersena nie jest planarny.*

Zadanie 72 (MM) *Każdy graf planarny bez* C_4 *ma co najwyżej* $(15n-30)/7$ *krawędzi. Znaleźć graf, który osiąga to oszacowanie.*

Bazę przestrzeni $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C}^*$) nazywamy prostą, gdy każda krawędź grafu G należy do nie więcej niż dwóch elementów tej bazy.

Zadanie 73 (RW) $\mathcal{C}^*$ *ma bazę prostą.*

Zadanie 74 (PM) *Jeśli* $\mathcal{C}(G)$ *ma bazę prostą, to dla każdej krawędzi* $e \in E(G)$, $\mathcal{C}(G-e)$ *ma też bazę prostą.*

Zadanie 75 (PWr) *Jeśli* $\mathcal{C}(G)$ *nie ma bazy prostej, to* $\mathcal{C}(TG)$ *też jej nie ma.*

Zadanie 76 (PWa) *Pokazać, że* $K_{3,3}$ *nie ma bazy prostej.*

Zadanie 77 (MS) *Udowodnić Tw. 17.*

Zadanie 78 (DP) *Oszacować lesistość grafu planarnego.*

Zadanie 79 (MM) *Dodanie krawędzi* e *do grafu maksymalnie planarnego* G *o* $|G| > 5$ *powoduje powstanie w* $G+e$ *zarówno* TK^5 *jak i* $TK_{3,3}$.

Zadanie 80 (PWa) *Jeśli* G *ma (właściwe) kolorowanie, w którym żaden kolor nie występuje dokładnie raz, to* G *ma też takie* $\chi(G)$*-kolorowanie.*

Zadanie 81 (WSZYSCY) *Dane są dwie wyimaginowane mapy: jedna na Ziemi, druga na Ksieżycu. Każdy kraj ma swój spójny obszar na obu ciałach niebieskich. Ile kolorów trzeba (wystarcza), by pomalować poprawnie wszystkie kraje na obu mapach, pamiętając, że kraje sąsiednie muszą mieć różne kolory, a obie części każdegu kraju są tego samego koloru.*

Zadanie 82 (DP) *Wierzchołki dowolnego grafu można uporządkować w ten sposób, że algorytm zachłanny używa tylko* $\chi(G)$ *kolorów.*

Zadanie 83 (PM) *Znaleźć 2-dzielny graf na* $2n$ *wierzchołkach, którego wierzchołki można uporządkować tak, że algorytm zachłanny potrzebuje* n *kolorów.*

Zadanie 84 (MS) *Wyznaczyć indeks chromatyczny grafu Petersena.*

Zadanie 85 (PWr) *Dla każdego* k *znajdź graf 2-dzielny o liczbie wyboru* k.

Zadanie 86 (RW) *Nie korzystając z Twierdzenia Thomassena, pokazać, że każdy graf planarny ma liczbę wyboru nie większą niż 6.*

Zadanie 87 (DLA WSZYSTKICH) *Znaleźć graf planarny o liczbie wyboru 5.*

Zadanie 88 () *Klasa grafów doskonałych nie jest zamknięta ze względu na usuwanie ani na kontrakcję krawędzi.*

Zadanie 89 () *Wywnioskować Tw. 21 z Hipotezy Berge'a.*

Zadanie 90 () *Dla grafu interwałowego* G *pokazać, że (a)* $\chi(G) = \omega(G)$, *(b)* $\chi(\bar{G}) = \omega(\bar{G})$, *(c)* G *jest przekątniowy.*

Zadanie 91 () *Dla grafu* G *wszystkich porównań posetu* P *udowodnić, że (a)* $\chi(G) = \omega(G)$, *(b)* $\chi(\bar{G}) = \omega(\bar{G})$.

Zadanie 92 () *Dla grafu dwudzielnego* G $\chi(\bar{G}) = \omega(\bar{G})$.

Zadanie 93 () *Korzystając z rezultatów przedstawionych na wykładzie, podać 1-linijkowy dowód tw. dualnego do tw. Königa :*W każdym grafie dwudzielnym G bez wierzchołków izolowanych minimalna liczba krawędzi pokrywających *wszystkie wierzchołki wynosi* $\alpha(G)$.

Zadanie 94 () *Graf G jest doskonały wgdy każdy podgraf indukowany G' ma zbiór niezależny przecinający wszystkie kliki w G'.*

Zadanie 95 () *Pokazać, że jeśli H jest grafem krawędziowym dowolnego grafu, to $\chi(H) \in \{\omega(H), \omega(H)+1\}$.*

Zadanie 96 () *Pokazać, że jeśli $\kappa(G) \geq 3$, to $G = TK^4$.*

Zadanie 97 (WSZYSCY) *Pokazać, że HH jest prawdziwa dla $r = 4$. Nie należy korzystać z żadnych innych wyników, natomiast trzeba udowodnić indukcją względem $|G|$, że każde 3-kolorowanie indukowanego cyklu w grafie bez MK^4 można rozciągnąć na cały graf. (Po drodze zastosować poprzednie zadanie, Tw. Mengera o wachlarzach.)*

Zadanie 98 () *Wywnioskować tw. o 4 kolorach z HH dla $r = 5$.*

Zadanie 99 () *Pokazać, że HH dla $r+1$ implikuje HH dla r.*

Zadanie 100 (WSZYSCY) *Udowodnić HH dla grafów krawędziowych. (Zredukować do grafów k-krytycznych i zastosować tw. Vizinga.)*

Zadanie 101 () *Niech $G = (X, Y, E)$ będzie dwudzielnym grafem ϵ-regularnym o gęstości $d_G(X, Y) = d$. Pokazać, że*

(a) jeśli $d > 2\epsilon$, to istnieje zbiór $A \subseteq [X]^2$ o mocy $|A| \geq (1 - 6\epsilon)\binom{|X|}{2}$ taki, że dla wszystkich par $u, v \in A$ mamy

$$(d - \epsilon)|Y| \leq \deg u, \deg v \leq (d + \epsilon)|Y|$$

oraz

$$(d - \epsilon)^2|Y| \leq \deg(u, v) \leq (d + \epsilon)^2|Y| \ ;$$

(b) jeśli $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, $|A| > \eta|X|$ i $|B| > \eta|Y|$, to podgraf $G[A \cup B]$ grafu G indukowany przez zbiory A i B jest ϵ/η-regularny;

(c) jeśli $E' \subseteq E$, $|E'| = \eta|E|$, to podgraf $G - E' = (X, Y, E - E')$ jest $(\epsilon + \eta\frac{d+\epsilon}{\epsilon^2})$-regularny.

Zadanie 102 () *Niech* $G = (X, Y, E)$, $n = |X| = |Y|$, *będzie dwudzielnym grafem* ϵ*-regularnym o gęstości* $d_G(X, Y) = d$. *Wprowadźmy (niestandardowe) oznaczenie* $N(S) = \bigcap_{v \in S} N_G(v)$ *dla zbioru wszystkich wspólnych sąsiadów wierzchołków zbioru* S, *gdzie* $S \subseteq X$. *Mówimy, że zbiór* S *jest dobry, gdy*

$$(d - \epsilon)^{|S|} \leq |N(S)| \leq (d + \epsilon)^{|S|} \ .$$

Pokazać, że

(a) każdy dobry zbiór S *mocy* k *jest zawarty w co najwyżej* $2\epsilon n$ *złych (= nie dobrych) zbiorach mocy* $k + 1$*;*

(b) wszystkie zbiory k*-elementowe* $S \subseteq X$, *oprócz co najwyżej* $\epsilon k \binom{n}{k}$, *są dobre.*

Zadanie 103 () *Niech* $G = (X, Y, E)$, $n = |X| = |Y|$, *będzie dwudzielnym grafem* ϵ*-regularnym o gęstości* $d_G(X, Y) = d > 2\epsilon$. *Pokazać, że jeśli* $\delta(G) \geq \epsilon$, *to* G *ma skojarzenie doskonałe. Czy w tym zadaniu* ϵ*-regularność można zastąpić słabszym warunkiem?*

Zadanie 104 () *Pokazać, że jeśli graf* G *o* n *wierzchołkach posiada* ϵ*-regularny podział* $(V_0, V_1, ..., V_k)$, *gdzie* $|V_0| < \epsilon n$, *to posiada on też* $\sqrt{\epsilon}$*-regularny podział* $(V_0', V_1', ..., V_k')$, *gdzie* $|V_0'| \leq k - 1$. *Czy stała* $\sqrt{\epsilon}$ *jest tu najlepsza możliwa?*

Zadanie 105 () *Dane są 3 zbiory wierzchołków* X, Y *i* Z, *wszystkie mocy* n. *Pokazać, że jeśli* $G_1 = (X, Y, E_1)$, $G_2 = (X, Z, E_2)$ *i* $G_3 = (Y, Z, E_3)$ *są* ϵ*-regularnymi grafami dwudzielnymi, każdy o gęstości* d, *to liczba trójkątów* T *w sumie grafów* $G_1 \cup G_2 \cup G_3$ *spełnia nierówności*

$$(1 - 2\epsilon)(d - \epsilon)^3 n^3 < T < \left[2\epsilon + (d + \epsilon)^3\right] n^3$$

Zadanie 106 () *Pokazać, że każda para* (X, Y), *która jest* ϵ*-regularna w grafie* G, *jest także* ϵ*-regularna w dopełnieniu* G^c *grafu* G.

Zadanie 107 () *Jeśli* (A, B) *jest* ϵ*-regularną parą o gęstości* d, *oraz* $Y \subseteq B$, $|Y| \geq \epsilon|B|$, *to wszystkie oprócz co najwyżej* $\epsilon|A|$ *wierzchołków* $v \in A$ *mają co najmniej* $(d - \epsilon)|Y|$ *sąsiadów w* Y.