5 Twierdzenie Mengera

Twierdzenie 8 (Menger, 1927 {D 3.3.1.}) *Niech G będzie grafem i niech $A, B \subseteq V(G)$. Wtedy minimalna liczba wierzchołków rozdzielających A i B równa się maksymalnej liczbie rozłącznych $A - B$ ścieżek.*

Dowód: Zauważmy, że nierówność min $\geq$ max jest oczywista, bo dowolny zbiór rozdzielający musi zawierać po 1 wierzchołku z każdej ścieżki z dowolnej rodziny rozłącznych ścieżek. Niech $k = k(G, A, B)$ będzie minimalną liczbą wierzchołków rozdzielających A i B. Wystarczy pokazać, że G ma k rozłącznych $A - B$ ścieżek.

Stosujemy indukcję względem $||G|| = |E(G)|$. Jeśli G jest pusty, to $k = |A \cap B|$ i tyleż jest rozłącznych (trywialnych) $A - B$-ścieżek.

Niech teraz $e = xy \in E(G)$. Przypuśćmy, że w G nie ma k rozłącznych $A - B$-ścieżek. Pokażemy najpierw, że wtedy istnieje zbiór X rozdzielający A i B taki, że $e \subseteq X$ i $|X| = k$.

Rozważmy graf $G|e$, a w nim zbiory A' i B', gdzie dla $C = A, B$, $C' = C$ gdy $C \cap e = \emptyset$ oraz $C' = C \setminus (C \cap e) \cup \{v_e\}$, gdy $C \cap e \neq \emptyset$. Skoro w G nie ma k rozłącznych $A - B$-ścieżek, to w $G|e$ nie ma k rozłącznych $A' - B'$-ścieżek.

Z założenia indukcyjnego, $G|e$ ma zbiór Y, który rozdziela A' i B' i ma moc $|Y| < k$. Jeśli $v_e \notin Y$, to Y rodziela A i B w G – sprzeczność. Zatem $v_e \in Y$, ale wtedy zbiór $X = Y \setminus \{v_e\} \cup e$ jest szukanym zbiorem rozdzielającym w G. Mamy $|X| \leq k$, więc na podstawie definicji k, $|X| = k$.

Teraz spójrzmy na graf $G - e$. Ponieważ $e \subseteq X$, każdy zbiór rozdzielający A i X w $G - e$ rozdziela również A i B w G, więc ma co najmniej k wierzchołków. Z założenia indukcyjnego, w $G - e$ jest więc k rozłącznych $A - X$ ścieżek, i podobnie, jest tam k rozłącznych $B - X$ ścieżek. Ponieważ X rozdziela A i B, te dwie rodziny ścieżek nie przecinają się poza X i na ich bazie można łatwo zbudować k rozłącznych $A - B$ ścieżek. (Logiczna struktura tego dowodu jest następująca: z koniunkcji $(p \wedge \neg q)$ wywnioskowaliśmy q, ale implikacja $(p \wedge \neg q) \Rightarrow q$ jest logicznie równoważna implikacji $p \Rightarrow q$, która była naszym celem.) ■

Alternatywny dowód Tw. 8 (Böhme, Göring, Harant, 1999):

Udowodnimy mocniejszy fakt. Niech $Kon(\mathcal{P})$ będzie zbiorem końców (w B) wszystkich ścieżek danej rodziny $A - B$ ścieżek $\mathcal{P}$. Niech G będzie grafem i $A, B \subseteq V(G)$. Dla każdej rodziny $A - B$ ścieżek $\mathcal{P}$ takiej, że $|\mathcal{P}| < k = k(G, A, B)$ istnieje rodzina $A - B$ ścieżek $\mathcal{Q}$ taka, że $|\mathcal{Q}| = |\mathcal{P}| + \infty$ oraz $Kon(\mathcal{P}) \subset Kon(\mathcal{Q})$.

Przy ustalonych G i A, dowód jest indukcyjny względem $|G-B|$. Przypadek $|G-B|=0$ jest oczywisty. Przyjmijmy teraz, że $B \neq V(G)$ i że $\mathcal{P}$ jest rodziną mniej niż k $A-B$ ścieżek. Niech R będzie dowolną $A-B$ ścieżką omijającą $Kon(\mathcal{P})$. Taka ścieżka istnieje bo żaden zbiór mocy $k-1$ nie rozdziela A i B.

Jeśli R omija wszystkie ścieżki w $\mathcal{P}$, to rodzinę $\mathcal{Q}$ otrzymujemy dodając R do $\mathcal{P}$. W przeciwnym razie niech x będzie ostatnim wierzchołkiem ścieżki R wspólnym z jakąś ścieżką P z $\mathcal{P}$. Zastąpmy ścieżkę P przez Px w $\mathcal{P}$, otrzymując nową rodzinę $\mathcal{P}'$ i jednocześnie rozszerzmy B o wierzchołki należące do podścieżek xP i xR i nazwijmy nowy zbiór B'. Zatem $\mathcal{P}'$ jest rodziną $k-1$ $A-B'$ ścieżek. Ponadto, $k(G,A,B') \geq k(G,A,B)$ i $|G-B'| < |G-B|$, więc z założenia indukcyjnego, istnieje rodzina $\mathcal{Q}'$ $A-B'$ ścieżek, taka, że $|\mathcal{Q}'| = |\mathcal{P}'|+1$ oraz $Kon(\mathcal{Q}') \supset Kon(\mathcal{P}')$.

Zatem istnieją w $\mathcal{Q}'$ ścieżki P_x i P_y takie, że P_x kończy się w x, a P_y kończy się w pewnym wierzchołku $y \notin Kon(\mathcal{P}')$. Obiecaną rodzinę $\mathcal{Q}$ konstruujemy następująco:

I. Jeśli $y \notin xP$, to wymieniamy ścieżki P_x i P_y na ich wydłużenia $P_x \cup xP$ i $P_y \cup yR$;

II. Jeśli $y \in xP$, to odwrotnie: zastępujemy P_x i P_y ścieżkami $P_x \cup xR$ i $P_y \cup yP$. ■

Zbiór $a-B$ ścieżek nazywamy wachlarzem (fan) jeśli każde dwie z nich mają tylko 1 wspólny wierzchołek (a).

Wniosek 3 (D 3.3.4) *Dla $B \subset V$ i $a \in V \setminus B$, minimalna liczba wierzchołków rozdzielających a od B i różnych od a jest równa maksymalnej mocy $a-B$ wachlarza.*

Wniosek 4 (D 3.3.5) *Niech a i b będą różnymi wierzchołkami w G.*

(i) Jeśli $ab \notin E$, to minimalna liczba wierzchołków rozdzielających a od b, ale różnych od a i b, jest równa maksymalnej liczbie niezależnych $a-b$ ścieżek.

(ii) Minimalna liczba krawędzi rozdzielających a od b jest równa maksymalnej liczbie krawędziowo rozłącznych $a-b$ ścieżek.

Twierdzenie 9 (Globalne Tw. Mengera {D 3.3.6}) *(i) G jest k-spójny wgdy zawiera k niezależnych ścieżek pomiędzy każdą parą różnych wierzchołków;*

(ii) G jest krawędziowo k-spójny wgdy zawiera k krawędziowo rozłącznych ścieżek pomiędzy każdą parą różnych wierzchołków.

Dowód: (i) Jeśli G ma k niezależnych ścieżek pomiędzy każdą parą wierzchołków, to $|G| > k$ i nie ma cięcia wierzchołkowego mocy mniejszej od k. Zatem G jest k-spójny.

Przypuśćmy, że k-spójny graf G ma dwa wierzchołki a, b nie połączone k niezależnymi ścieżkami. Na podstawie Wniosku 4, $ab \in E(G)$. W grafie $G' = G - ab$, są co najwyżej $k-2$ niezależne ścieżki pomiĘdzy a i b. Ponownie z Wniosku 4, a i b można rozdzielić w G' zbiorem X mocy $k-2$. Ponieważ $|G| = |G'| > k$, istnieje $v \notin X \cup \{a, b\}$. Zbiór X musi rozdzielać w G' v od a lub b. Przyjmijmy, że X rozdziela w G' v i a. Wtedy jednak zbiór $X \cup \{b\}$ mocy $k-1$ rozdziela w G v i a – sprzeczność z k-spójnością G. ■