6 „Linking"

Definicja grafu *k-zwartego (ang.: k-linked)*. Graf G nazywamy k-zwartym, gdy $|G| \geq 2k$ oraz, dla każdego ciągu różnych $2k$ wierzchołków $s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k$, istnieje k rozłącznych ścieżek $P_1, \ldots, P_k$, gdzie P_i jest $s_i - t_i$ ścieżką, $i = 1, \ldots, k$. Jest to własność mocniejsza od k-spójności.

Twierdzenie 10 (Jung 1970; Larman & Mani, 1970, {D 3.5.2}) *Istnieje funkcja f taka, że dla każdego k, każdy $f(k)$-spójny graf jest k-zwarty.*

W dowodzie Tw. 10 jako lemat wykorzystuje się inne twierdzenie o zawieraniu klik topologicznych, które trzeba poprzedzić serią definicji:

Podpodział grafu. Podpodziałem grafu X nazywamy *każdy* graf Y otrzymany z X przez zastąpienie (niektórych) jego krawędzi niezależnymi ścieżkami. Piszemy wtedy $Y = TX$. UWAGA: TX to nie jeden graf lecz cała, nieskończona rodzina.

Topologiczny minor. Jeśli $Y = TX \subseteq G$, to mówimy, że X jest topologicznym minorem grafu G (X nie musi być podgrafem grafu G).

Przykład: $X = K_3$ jest topologicznym minorem grafu Petersena, bo jego podpodziałem jest $Y = C_5$, zawarty w grafie Petersena.

Wierzchołki główne i dodatkowe. Jeśli $Y = TX$ oraz $\delta(X) \geq 3$, to zbiór $V(X) \subseteq V(Y)$ nazywamy zbiorem wierzchołków głównych, a $V(Y) \setminus V(X)$ zbiorem wierzchołków pomocniczych. (Łatwo je odróżnić: te drugie mają stopień dwa.)

Klika topologiczna. Jeśli $X = K_r$, to każdy minor topologiczny $Y = TX \subseteq G$ nazywamy kliką topologiczną w G.

Ściągnięcie (kontrakcja) podzbioru wierzchołków. To operacja polegająca na zastąpieniu podzbioru wierzchołków $U \subseteq V(G)$ indukującego podgraf spójny, jednym, nowym wierzchołkiem v_U, zachowując wszystkie krawędzie biegnące w G z U na zewnątrz (usuwając jednak krawędzie równoległe). Nowy graf oznaczamy przez $G|U$.

Lemat 3 (Mader 1967,{D 3.5.1}) *Istnieje funkcja h taka, że każdy graf G o średnim stopniu co najmniej $h(r)$ zawiera TK_r.*

Dowód: Dla $r \leq 2$ jest to prawdą, nawet biorąc $h(r) = 1$. Załóżmy więc, że $r \geq 3$. Pokażemy indukcją względem $m = r, \ldots, \binom{r}{2}$, że każdy graf spójny G o średnim stopniu $d(G) \geq 2^m$ zawiera topologiczny minor TX jakiegoś grafu X o $|X| = r$ i $||X|| = m$. Dla $m = \binom{r}{2}$, otrzymamy tezę twierdzenia z $h(r) = 2^{\binom{r}{2}}$.

Przypadek $m = r$ jest łatwy. Na podstawie Faktu 5 poniżej, G zawiera podgraf H o minimalnym stopniu 2^{r-1}, więc zawiera cykl długości co najmniej $2^{r-1} + 1 > r$. Każdy taki cykl jest minorem topologicznym cyklu C_r, który jest szukanym grafem X.

Załóżmy teraz, że $r < m \leq \binom{r}{2}$, G jest spójny, $d(G) \geq 2^m$. Niech U będzie maksymalnym podzbiorem zbioru $V(G)$ takim, że $G[U]$ jest spójny oraz $d(G|U) \geq 2^m$. (U istnieje, bo dla każdego $v \in V(G)$, mamy $G|\{v\} = G$.) Zauważmy, że $U \neq V(G)$, bo wtedy $d(G|U) = d(K_1) = 0$.

Niech $H = G[N(U)]$, gdzie $N(U) = N_G(U) \setminus U$ jest (niepustym) zbiorem sąsiadów wierzchołków z U, którzy nie należą do U. Gdyby $\delta(H) \leq 2^{m-1} - 1$, to można by powiększyć zbiór U, dodając do niego wierzchołek v o minimalnym stopniu w H. Wtedy $e(G|U \cup \{v\}) = e(G|U) - 1 - d_H(v)$ i w konsekwencji $d(G|U \cup \{v\}) \geq 2^m$ – sprzeczność z maksymalnością U (podgraf $G|U \cup \{v\}$ jest spójny).

Zatem $d(H) \geq \delta(H) \geq 2^{m-1}$ i z założenia indukcyjnego, $H \supseteq TZ$, gdzie $|Z| = r$, $||Z|| = m - 1$. Niech x, y będą wierzchołkami głównymi TZ, nie połączonymi krawędzią w Z. Ponieważ $x, y \in N(U)$ oraz $G[U]$ jest spójny, to istnieje $x - y$ ścieżka w G o wszystkich wierzchołkach wewnętrznych w U, czyli poza H. Dodając ją do TZ otrzymujemy minor topologiczny TX, gdzie $X = Z \cup \{xy\}$. ■

Fakt 5 ({D 1.2.2}) *Każdy graf G o $||G|| \geq 1$ ma podgraf H taki, że*

$$\delta(H) > \frac{1}{2} d(H) \geq \frac{1}{2} d(G)$$

Dowód Twierdzenia 10: Twierdzenie udowodnimy z $f(k) = h(3k) + 2k$, gdzie h jest funkcją z Lematu 3. Niech G będzie grafem $f(k)$-spójnym. Wtedy

$$d(G) \geq \delta(G) \geq \kappa(G) \geq h(3k).$$

Niech $K = TK_{3k}$ będzie topologiczną kliką rzędu $3k$ w G, gwarantowaną przez Lemat 3, i niech U będzie zbiorem jej $3k$ wierzchołków węzłowych.

Niech $A = \{s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k\}$ będzie zbiorem różnych wierzchołków w G. Ponieważ $\kappa(G) \geq 2k$, to na podstawie Tw. Mengera istnieje rodzina $\mathcal{R}$ złożona z $2k$ rozłącznych A–U ścieżek. Wybierzmy ją tak, by zminimalizować liczbę

$$| \bigcup_{R\in\mathcal{R}} E(R) \setminus E(K) \, | \, .$$

Niech

$$\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_k, Q_1, \ldots, Q_k\},$$

gdzie P_i ma koniec w s_i, a Q_i – w t_i, $i = 1, \ldots, k$. Oznaczmy ich drugie końce (te w U) przez s^i, t^i, odpowiednio, a pozostałe wierzchołki w U przez $u_1, \ldots, u_k$.

Niech L_i będzie U-ścieżką łączącą u_i z s^i w K. Niech v_i będzie wierzchołkiem L_i, najbliższym u_i, leżącym na jakiejkolwiek ścieżce R z $\mathcal{R}$. Z minimalności $\mathcal{R}$, R musi się pokrywać z L_i na całym odcinku zaczynającym się w v_i, (a kończącym w s^i), tzn. $v_iR = v_iL_i$. W przeciwnym razie, podścieżka v_iR zawierałaby krawędź spoza K, i zastępując tę podścieżkę w R przez $v_iL_iu_i$, tzn. przez podścieżkę L_i pomiędzy v_i i u_i, której wszystkie krawędzie należą do K, i która nie ma żadnych innych wierzchołków wspólnych ze ścieżkami z $\mathcal{R}$, otrzymalibyśmy $A - U$ ścieżkę $R' = Rv_iL_iu_i$ taką, że rodzina $\mathcal{R} - R + R'$ miałaby mniej krawędzi poza K niż $\mathcal{R}$.

Stąd, $R = P_i$. Podobnie, oznaczając przez M_i U-ścieżkę łączącą u_i z t^i w K, a przez w_i wierzchołek M_i, najbliższy u_i, leżący na jakiejkolwiek ścieżce R z $\mathcal{R}$, wnioskujemy, że tą ścieżką jest Q_i. Zatem ścieżki $s_iP_iv_iL_iu_iM_iw_iQ_it_i$, $i = 1, \ldots, k$, są rozłączne (rysunek!), co dowodzi, że G jest k-zwarty. ■

Z dowodów Lematu 3 i twierdzenia 10 wynika, że $h(r) \leq 2^{\binom{r}{2}}$, a $f(k) \leq 2^{\binom{3k}{2}} + 2k$. Thomas i Wollan w r. 2005 poprawili to oszacowanie do $f(k) \leq 16k$. (Przypomnijmy, że $d(G) \geq \kappa(G)$.)

Twierdzenie 11 (D 3.5.3, Thomas i Wollan 2005) *Jeśli G jest $2k$-spójny i $\epsilon(G) \geq 8k$, to G jest k-zwarty.* ■

Również oszacowanie z Lematu 3 można poprawić i to właśnie przy pomocy Twierdzenia 11: najmniejsza funkcja $h(r)$ jest rzędu r^2. Pokazali to, niezależnie, Bollobás, Thomason (1998) i Komlós, Szemerédi, (1996).

Twierdzenie 12 (D 7.2.1) *Istnieje c takie, że dla każdego r, jeśli $d(G) \geq cr^2$, to $G \supseteq TK_r$.*

W dowodzie, oprócz Twierdzenia 11 przydatny będzie następujący fakt.

Twierdzenie 13 (D 1.4.3, Mader 1972) *Każdy graf G o $d(G) \geq 4k$ ma $(k+1)$-spójny podgraf H o $\epsilon(H) > \epsilon(G) - k$.*

Dowód: Niech $\gamma := \epsilon(G) \geq 2k$ i rozważmy wszystkie podgrafy $G' \subseteq G$ takie, że

$$|G'| \geq 2k \qquad \text{i} \qquad ||G'|| > \gamma(|G| - k). \tag{2}$$

Ponieważ $d(G) \leq d(K_{|G|}) < |G|$, to G jest jednym z takich podgrafów. Niech H będzie takim podgrafem o najmniejszej liczbie $|H|$.

Zauważmy, że każdy graf G' spełniający (2) ma $|G'| > 2k$. Zatem, z minimalności H, mamy $\delta(H) > \gamma$, bo w przeciwnym razie H zawierałby podgraf właściwy spełniający (2). Stąd, $|H| \geq \gamma$ i dzieląc drugą nierówność w (2) dla H przez $|H|$ otrzymujemy, że $\epsilon(H) > \gamma - k$.

Pozostaje pokazać, że H jest $(k+1)$-spójny. Przypuśćmy nie wprost, że nie jest, to znaczy, że istnieje podział $V(H) = U_1 \cup U_2$, taki że nie ma krawędzi między $U_1 \backslash U_2$ a $U_2 \backslash U_1$, oba te zbiory są niepuste oraz $|U_1 \cap U_2| \leq k$. Niech $H_i = H[U_i]$, $i = 1, 2$. Ponieważ dla każdego $v \in U_1 \setminus U_2$ mamy $d_{H_i}(v) = d_H(v) \geq \delta(H) > \gamma \geq 2k$, to $|H_i| > 2k$. Zatem, z minimalności H, $||H_i|| \leq \gamma(|H_i| - k)$. Wtedy jednak

$$||H|| \leq ||H_1|| + ||H_2|| \leq \gamma(|H_1| + |H_2| - 2k) \leq \gamma(|H| - k)$$

– sprzeczność. ■

Dowód Twierdzenia 12: Niech $d(G) \geq 10r^2$ i załóżmy, że r jest liczbą parzystą. Na podstawie Tw. 13 z $k = r^2$, G ma r^2-spójny podgraf H, gdzie $\epsilon(H) \geq 4r^2$. Na podstawie Tw. 11 z $k = r^2/2$, H jest r^2-zwarty. Ponieważ $\delta(H) \geq \kappa(H) \geq r^2$, można wybrać r wierzchołków $v_1, \ldots, v_r$ i dla każdego z v_i zbiór $r-1$ jego sąsiadów u_i^j, gdzie $1 \leq j \leq r$, $j \neq i$, tak, że wszystkie r^2 wierzchołki są różne. Teraz połączmy wierzchołki u_i^j w $\binom{r}{2}$ par postaci u_i^j, u_j^i oraz wierzchołki v_i w pary, i zastosujmy r^2-zwartość. Otrzymane rozłączne ścieżki pomiędzy wierzchołkami u_i^j tworzą wraz z wierzchołkami bazowymi v_i topologiczną klikę TK_r. (Gdy r jest nieparzyste, to wzmacniamy założenie na $d(G) \geq 10r^2 + 8$ tak, by H był $(r^2+1)/2$-zwarty. Nastepnie, wybieramy dodatkowo v_0 i dalej bez zmian.) ■

Dla danym grafów X i G, piszemy $G = MX$, gdy $V(G) = \bigcup_{x \in V(X)} V_x$, V_x są parami rozłączne, dla każdego $x \in V(X)$ indukowany podgraf $G[V_x]$ jest spójny i dla każdej pary $x, y \in V(X)$ istnieje krawędź pomiędzy V_x i V_y wgdy $xy \in E(X)$. Innymi słowy, X powstaje z G przez ściągnięcie zbiorów V_x i usunięcie krawędzi równoległych. Jeśli $G = MX$ i $G \subseteq Y$, to X nazywamy minorem grafu Y. Dla zwykłych minorów MK_r próg na gęstość

$d(G)$ gwarantujący istnienie MK_r w G jest trochę niższy niż w przypadku klik topologicznych TK_r.

Twierdzenie 14 (D 7.2.2, Kostochka 1982,) *Istnieje c takie, że dla każdego r, jeśli $d(G) \geq cr\sqrt{\log r}$, to $G \supseteq MK_r$.*