7 Drzewiastość i lesistość

Inna miara spójności: *drzewiastość* = maksymalna liczba krawędziowo rozłącznych rozpiętych drzew.

Kiedy istnieje k takich drzew w grafie?

Warunek konieczny: Dla każdego podziału V na r części, G ma co najmniej $(r-1)k$ krawędzi „pomiędzy".

Twierdzenie 15 (Tutte, 1961; Nash-Williams, 1961, {D 2.4.1}) *Multigraf G zawiera k rozłącznych rozpiętych drzew wgdy każdy podział Π zbioru V ma co najmniej $k(|\Pi|-1)$ „międzykrawędzi".*

Wniosek 5 *Jeśli G jest krawędziowo $2k$-spójny, to G ma k rozłącznych rozpiętych drzew.*

Dowód: Dla każdego podziału Π, na podstawie 2-spójności, mamy co najmniej $\frac{1}{2}|\Pi|2k > k(|\Pi|-1)$ „międzykrawędzi". ■

Definicja podziału grafu G na rozpięte podgrafy $G_1, ..., G_k$: $E(G) = E(G_1) \cup ... \cup E(G_k)$.

Drzewiastość grafu wiąże się z problemem: znaleźć podział grafu na jak najwięcej spójnych, rozłącznych, rozpiętych podgrafów (bo drzewa są minimalnymi spójnymi grafami).

Problem dualny: znaleźć podział grafu na jak najmniej acyklicznych podgrafów (bo drzewa są maksymalnymi acyklicznymi grafami).

Inaczej, przy danym k, które grafy można podzielić (rozłożyć) na nie więcej niż k lasów?

Komentarz: Spójność jest własnością rosnącą, a cykliczność – malejącą.

Warunek konieczny: Dla każdego $\emptyset \neq U \subseteq V$, zachodzi $||G[U]|| \leq k(|U|-1)$.

Twierdzenie 16 (Nash-Williams, 1964,{D 2.4.4}) *Multigraf G można podzieć na co najwyżej k lasów wgdy dla każdego $\emptyset \neq U \subseteq V$, zachodzi $||G[U]|| \leq k(|U|-1)$.*

Dowody obu powyższych twierdzeń (w wersji pochodzącej od Madera) opierają sie na tym samym lemacie.

Lemat 4 *Niech $F_1^0, \ldots, F_k^0$ będzie zbiorem k krawędziowo-rozłącznych lasów w grafie G o maksymalnej łącznej liczbie krawędzi $\sum_{i=1}^k ||F_i^0||$ i niech $e^0 \in E(G) \setminus \bigcup_{i=1}^k E(F_i^0)$. Wtedy istnieje $U \subseteq V(G)$ taki, że $U \supset e^0$ oraz, dla każdego $i = 1, \ldots, k$, indukowany podgraf $F_i^0[U]$ lasu F_i^0 jest spójny.*

Pokażemy teraz jak szybko wynikają z niego oba twierdzenia.

Dowód Twierdzenia 16: Przypuśćmy, że multigrafu G nie można podzielić na k lasów. Wtedy, jeśli $F_1^0, \ldots, F_k^0$ oraz e_0 i U są takie jak w Lemacie 4, to $||G[U]|| \geq k(|U| - 1) + 1$ – sprzeczność. ■

Dowód Twierdzenia 15: Pokażemy tylko nietrywialną implikacje. Jest to dowód indukcyjny względem $|G|$. Łatwo sprawdzić, że implikacja zachodzi dla multigrafów G o $|G| = 2$. Niech G będzie grafem o $|G| > 2$ i załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla wszystkich grafów o liczbie wierzchołków mniejszej niż $|G|$.

Niech $F_1^0, \ldots, F_k^0$ będą jak w Lemacie 4. Jeśli wszystkie F_i^0 są drzewami, to koniec dowodu. W przeciwnym razie, $\sum_{i=1}^k ||F_i^0|| < k(|G| - 1)$, ale z założenia twierdzenia, biorąc podział zbioru $V(G)$ na jednoelementowe podzbiory, otrzymujemy $||G|| \geq k(|G| - 1)$. Zatem istnieje krawędź $e^0 \in E(G) \setminus \bigcup_{i=1}^k E(F_i^0)$.

Niech U będzie zbiorem jak w Lemacie 4. Ściągając go do jednego wierzchołka v_U otrzymujemy graf $G|U$. Każdy podział Π wierzchołków grafu $G|U$ indukuje podział Π' wierzchołków grafu G, na tę samą liczbę części i o tej samej liczbie „międzykrawędzi", których z założenia jest co najmniej $k(|G|-1)$. Ponieważ $|U| \geq 2$, mamy $|G|U| < |G|$ i na podstawie założenia indukcyjnego, $G|U$ ma k krawędziowo rozłącznych rozpiętych drzew $T_1, \ldots, T_k$. Zastępując w drzewie T_i wierzchołek v_U przez drzewo $F_i^0[U]$ otrzymujemy zbiór krawędziowo rozłącznych rozpiętych drzew w G. ■

Najmniejsze k jak w Twierdzeniu 16 nosi nazwę *lesistości grafu* (ang. *arboricity*).