8 Kryteria planarności

Graf planarny, to graf, który można narysować (umieścić, zanurzyć) na płaszczyźnie tak, by krawędzie nie przecinały się poza swoimi wierzchołkami. Należy odróżniać graf planarny (obiekt abstrakcyjny) od *grafu płaskiego* (konkretny rysunek grafu planarnego bez przecięć krawędzi).

8.1 Topologiczne kryterium planarności

Wiemy już, że ani K_5 ani $K_{3,3}$ nie jest planarny. Również żadna topologiczna klika TK_5 ani $TK_{3,3}$ nie jest planarna. Stąd żaden graf zawierający TK_5 lub $TK_{3,3}$ nie jest planarny. Kuratowski odwrócił tę implikację.

Twierdzenie 17 (Kuratowski 1930 D 4.4.6) *Graf jest planarny wgdy nie zawiera TK_5 ani $TK_{3,3}$.*

Najpierw pokażemy, że można się ograniczyć do zwykłych minorów. Dla danym grafów X i Y, piszemy $Y = MX$, gdy $V(Y) = \bigcup_{x \in V(X)} V_x$, V_x są parami rozłączne, dla każdego $x \in V(X)$ indukowany podgraf $Y[V_x]$ jest spójny i dla każdej pary $x, y \in V(X)$ istnieje krawędź pomiędzy V_x i V_y wgdy $xy \in E(X)$. Innymi słowy, X powstaje z Y przez ściągnięcie zbiorów V_x i usunięcie krawędzi równoległych. Jeśli $Y = MX$ i $Y \subseteq Y$, to X nazywamy minorem grafu Y. Obie relacje, bycia minorem i topologicznym minorem (zdefiniowana w rozdziale 6), są częściowymi porządkami.

Lemat 5 (D 4.4.2) *Graf zawiera K_5 lub $K_{3,3}$ jako minor wgdy zawiera K_5 lub $K_{3,3}$ jako topologiczny minor.*

Dowód: Łatwo pokazać, że każdy TX jest również MX oraz, że przy $\Delta(X) \leq 3$, każdy MX zawiera TX (ćwiczenia). Zatem wystarczy pokazać, że każdy graf G zawierający MK_5 zawiera TK_5 lub $MK_{3,3}$.

Niech K będzie minimalnym podgrafem G, takim że $K = MK_5$. Wtedy, każdy z 5 zbiorów podziału, V_i, $i = 1, \ldots, 5$, indukuje drzewo T_i, a pomiędzy każda parą tych zbiorów jest dokładnie 1 krawędź. Rozszerzmy drzewa T_i do drzew T_i' poprzez dodanie 4 krawędzi łączących je w K z innymi zbiorami podziału.

Z minimalnosci K, drzewa T_i' mają dokładnie 4 wierzchołki wiszące (te należące do innych zbiorów). Jeśli dla każdego i, $T_i' = TK_{1,4}$, to $K = TK_5$. Jeśli, np. T_1' nie jest $TK_{1,4}$, to ma dokładnie 2 wierzchołki stopnia

3, powiedzmy a i b. Wtedy, dzielimy $V_1 = A \cup B$, gdzie $a \in A$, $b \in B$, i ściągamy zbiory $A, B, V_2, ..., V_5$, otrzymując $K_{3,3}$. ■

Zatem Tw. Kuratowskiego jest równoważne następującemu.

Twierdzenie 18 (Wagner 1937 D 4.4.6) *Graf jest planarny wgdy nie zawiera MK_5 ani $MK_{3,3}$.*

Udowodnimy je najpierw dla grafów 3-spójnych.

Lemat 6 (D 4.4.3) *Każdy 3-spójny graf G bez MK_5 ani $MK_{3,3}$ jest planarny.*

Dowód: Indukcja względem $|G|$. Dla $|G| = 4$ jest to prawda ($G = K_4$). Niech $|G| > 4$ i załóżmy Lemat jest prawdziwy dla mniejszych grafów. Z Lematu 2, G ma krawędź xy taką, że $G|xy$ jest 3-spójny. Oczywiście, $G|xy$ też nie ma MK_5 ani $MK_{3,3}$ (z przechodniości), więc z założenia ind. jest planarny. Niech $\tilde{G}$ będzie grafem płaskim izomorficznym z $G|xy$ (rysunkiem $G|xy$).

Niech f będzie ścianą $\tilde{G} - v_{xy}$ zawierającą v_{xy}, a C jej brzegiem. Ponieważ $\tilde{G} - v_{xy}$ jest 2-spójny, to C jest cyklem (ćw.). Niech $X = N_G(x) - \{x\}$ i $Y = N_G(y) - \{y\}$. Mamy $X \cup Y \subseteq V(C)$. Usuwając z $\tilde{G}$ krawędzie łączące v_{xy} z $Y \setminus X$, otrzymujemy rysunek $G - y$, gdzie v_{xy} jest obrazem x. Teraz dorysujemy tam y wraz z przyległymi krawędziami.

Ponumerujmy wierzchołki z X kolejno wzdłuż cyklu C: $x_1, \ldots, x_k$. Dzielą one C na ścieżki P_i, $i = 1, \ldots, k$, o końcach w x_i i x_{i+1}, gdzie $x_{k+1} = x_1$. Pokażemy, że $Y \subseteq V(P_i)$ dla pewnego i. Jeśli nie, to albo istnieją 4 różne wierzchołki $x', x'' \in X$ i $y', y'' \in Y$, ułożone na cyklu w kolejności x', y', x'', y'', albo $|X \cap Y| \geq 3$. Dodając x i y, w pierwszym przypadku otrzymalibyśmy $TK_{3,3}$ w G, w drugim – TK_5. Tak czy siak, sprzeczność.

Niech więc $Y \subseteq V(P_i)$. Wtedy jednak możemy umieścić y we wnętrzu ściany $\tilde{G}$ otoczonej cyklem $x - x_i - P_i - x_{i+1} - x$, otrzymując płaski rysunek grafu G. ■

Do pełnego dowodu Tw. Kuratowskiego/Wagnera wystarczy teraz następujący lemat.

Lemat 7 (D 4.4.5) *Jeśli $|G| \geq 4$ i G jest krawędziowo maksymalnym grafem bez TK_5 i $TK_{3,3}$, to G jest 3-spójny.* ■

I na koniec ważny wniosek.

Wniosek 6 (D 4.4.7) *Każdy krawędziowo maksymalny graf planarny (triangulacja) o co najmniej 4 wierzchołkach jest 3-spójny.*