TEORIA GRAFÓW 2 (TGR 430)– WIOSNA 2009

Andrzej Ruciński

w oparciu o podręcznik Diestela

30 marca 2015

1 Twierdzenie strukturalne Gallai'a i Edmondsa

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem, a $v \in V$. Wprowadźmy oznaczenia

$$N_G(v) = \{u \in G : uv \in E(G)\}$$

i, dla $S \subseteq V$,

$$N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v).$$

Zbiory $N_G(v)$ i $N_G(S)$ nazywamy *sąsiedztwami.*

Skojarzenie M w grafie G to dowolny podgraf grafu G złożony z rozłącznych krawędzi. Mówimy, że skojarzenie M *nasyca* zbiór S, gdy $S \subseteq V(M)$. Skojarzenie jest *doskonałe*, gdy nasyca cały zbiór $V(G)$. Skojarzenie doskonałe nazywane jest często *1-faktorem.*

Twierdzenie 1 (Hall, 1935) *Niech $G = (V_1, V_2, E)$ będzie grafem dwudzielnym. Wtedy G posiada skojarzenie nasycające V_1 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $S \subseteq V_1$ zachodzi nierówność*

$$|N_G(S)| \geq |S|. \tag{1}$$

Niech $\mathcal{C}_G$ będzie rodziną wszystkich składowych grafu G, a $q(G)$ – liczbą składowych nieparzystych, tzn.

$$q(G) = |\{C \in \mathcal{C}_G : |V(C)| \text{ jest liczbą nieparzystą }\}|.$$

Twierdzenie 2 (Tutte) *G ma 1-faktor wgdy dla każdego S*

$$q(G-S) \le |S|.$$

Graf G nazywamy *factor-critical* gdy $V_G \neq \emptyset$ i dla każdego $v \in V_G$ podgraf $G - v$ ma 1-faktor. Zbiór $S \subseteq V_G$ nazywamy *matchable*, gdy graf dwudzielny

$$H_S = (S, \mathcal{C}_{G-S}, \{sC : \exists c \in V(C) : sc \in E(G)\})$$

ma skojarzenie nasycające S.

Twierdzenie 3 (Tw. Strukturalne, Gallai 1964, Edmonds 1965 {D 2.2.3.}) *Dla każdego grafu G*

(a) Istnieje $S \subseteq V(G)$ taki, że

(i) S jest matchable

(ii) Każda składowa $C \in \mathcal{C}_{G-S}$ jest factor-critical

(b) Dla każdego $S \subseteq V(G)$ spełniającego warunki (i) and (ii)

$$G \textit{ ma 1-faktor} \qquad \Leftrightarrow \qquad |S| = |\mathcal{C}_{G-S}|.$$

Uwaga 1 Tw. strukturalne implikuje Tw. Tutte'a, bo $\exists S \subseteq V(G)$ taki, że

$$|S| \overset{(i)}{\le} |\mathcal{C}_{G-S}| \overset{(ii)}{=} q(G-S) \overset{T.T.}{\le} |S| \qquad \Rightarrow \qquad |S| = |\mathcal{C}_{G-S}|,$$

wię na podstawie części (b), G ma 1-faktor.

Uwaga 2 Część (a) implikuje część (b), bo jeśli G ma 1-faktor, to jak poprzednio z (a) wynika, że $|S| = |\mathcal{C}_{G-S}|$; a w drugą stronę, jeśli $|S| = |\mathcal{C}_{G-S}|$, to konstruujemy 1-faktor M w G ze skojarzenia M_S nasycającego S w H_S (M_S jest w tym przypadku doskonałe) oraz z 1-faktorów M_s w $C - v_s$, gdzie $s \in S$, $v_s \in V(C)$, a $sv_s \in M_S$.

Uwaga 3 Tw. Strukturalne mówi wiele na temat struktury największych skojarzeń (nie tylko doskonałych). Jeśli S spełnia (i) i (ii), to mówimy, że skojarzenie M jest generowane przez S, gdy powstaje z S w sposób opisany w Uwadze 2. (Jeśli $|S| < |\mathcal{C}_{G-S}|$, to M nie jest doskonałe.) Ten sam zbiór S może generować wiele skojarzeń, wszystkie tej samej mocy

$$|S| + \frac{1}{2}\left(n - |S| - |\mathcal{C}_{G-S}|\right),$$

gdzie $n = |V(G)|$.

Obserwacja 1 *Każde największe skojarzenie M w G jest generowane przez każdy zbiór $S \subseteq V(G)$ spełniający warunki (i) i (ii).*

Dowód: Ustalmy największe skojarzenie M w G oraz zbiór $S \subseteq V(G)$ spełniający warunki (i) i (ii). Niech M_0 będzie dowlnym skojarzeniem generowanym przez S. Skracając $\mathcal{C}_{G-S}$ do $\mathcal{C}$, mamy

$$|M| \geq |M_0| = |S| + \frac{1}{2}\left(n - |S| - |\mathcal{C}|\right).$$

Niech k_S będzie liczbą krawędzi M o przynajmniej jednym końcu w S, a $k_{\mathcal{C}}$ – liczbą pozostałych krawędzi M. Wtedy

$$k_S \leq |S| \qquad\qquad k_{\mathcal{C}} \leq \frac{1}{2}\left(n - |S| - |\mathcal{C}|\right),$$

gdzie druga nierówność wynika stąd, że krawędzie liczone przez $k_{\mathcal{C}}$ nie nasycają przynajmniej po jednym wierzchołku z każdej składowej $C \in \mathcal{C}$. Ponieważ $|M| = k_S + k_{\mathcal{C}}$, to

$$k_S = |S| \qquad\qquad k_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2}\left(n - |S| - |\mathcal{C}|\right),$$

a więc M też jest generowane przez S. ■

Dowód Twierdzenia 3(a): Dowód opiera się na indukcji względem $n = |V(G)|$. Dla $n = 1$ wybierzmy $S = \emptyset$. Dla $n \geq 2$ załóżmy, że Twierdzenie 3 jest prawdziwe dla wszytkich grafów G' z $|V(G')| < n$.

Zdefiniujmy parametry $d_G(T) := d(T) = q(G-T)-|T|$ i $d = \max_{T \subseteq V} d_G(T)$. (Parametr d można by nazwać deficytem Tutte'a). Biorąc $T = \emptyset$, widzimy, że $d \geq d_G(\emptyset) \geq 0$. Niech S będzie *największym* zbiorem S spełniającym równość $d_G(S) = d$. Pokażemy, że S spełnia warunki (i) i (ii) z części (a) Twierdzenia 3. Zrobimy to w 3 krokach, ujętych w formie faktów. Niech $\mathcal{C} := \mathcal{C}_{G-S}$.

Fakt 1 $|\mathcal{C}| = q(G - S)$

Dowód: Przypuśćmy nie wprost, że $\exists C \in \mathcal{C}$, taka że $|V(C)|$ jest liczbą parzystą. Dla dowolnego $c \in V(C)$, weźmy $T = S \cup \{c\}$ i $C' = C - c$. Ponieważ $|V(C')|$ jest liczbą nieparzystą, to $q(C') \geq 1$. Stąd $q(G - T) \geq q(G - S) + 1$, więc $d(T) \geq d(S)$, co jest sprzeczne z wyborem S. ■

Fakt 2 $\forall C \in \mathcal{C}$: *składowa C jest factor-critical.*

Dowód: Przypuśćmy nie wprost, że $\exists C \in \mathcal{C} \quad \exists c \in V(C)$ takie, że $C' = C - c$ nie ma 1-faktora. Z założenia indukcyjnego zastosowanego do C' oraz Tw. Tutte'a (patrz Uwaga 1) $\exists S' \subseteq V(C')$ taki, że $q(C' - S') \geq |S'| + 1$. Ale, $q(C' - S') = |T'| \pmod 2$, więc $q(C' - S') \geq |S'| + 2$, co jest równoważne temu, że $d_{C'}(S') \geq 2$. Weźmy $T = S \cup \{c\} \cup S'$. Wtedy

$$d(T) \geq d(S) - 1 - 1 + d_{C'}(S') \geq d(S),$$

gdzie pierwsza "1"jest odjęta z powodu utraty składowej C, a druga z powodu dodania wierzchołka c. To stoi w sprzeczności z wyborem zbioru S. ■

Fakt 3 *S jest matchable.*

Dowód: Jeśli nie, to z Tw. Halla istnieje podzbiór $S' \subseteq S$ taki, że $|N_H(S')| < |S'|$. Wtedy jednak, biorąc $T = S \setminus S'$, mamy

$$d(T) = q(G - T) - |T| \geq q(G - S) - |N_H(S')| - |S| + |S'| > d(S) = d,$$

sprzeczność z definicją d. ■

2 Liczby Turána dla skojarzeń

Niech $\nu(G)$ oznacza moc największego skojarzenia w grafie G, $|V(G)| = n$ oraz s będzie liczbą naturalną taką że $1 \leq s \leq \frac{n}{2}$. Możemy postawić następujęce pytanie: ile krawędzi maksymalnie może mieć graf G, aby moc największego skojarzenia nie przekraczała $s-1$ lub rownoważnie, jaka liczba krawędzi zagwarantuje nam istnienie w grafie G skojarzenia o mocy s.

Rozważmy dwa szczególne grafy o n wierzchołkach. Pierwszy z nich składa sę z dwóch zbiorów wierzchołków V_1 i V_2, przy czym V_1 jest $(s-1)$-wierzchołkową kliką, V_2 jest zbiorem niezależnym mocy $n-s+1$, natomiast w G mamy wszystkie $(s-1)(n-s+1)$ krawędzie pomiędzy V_1 i V_2. Graf ten niewątpliwie nie zawiera skojarzenia mocy s, natomiast liczba jego krawędzi wynosi $\binom{n}{2} - \binom{n-s+1}{2}$.

Drugim grafem jest graf składający się z $(2s-1)$-elementowej kliki oraz $(n-2s+1)$-elementowego zbioru niezależnego, ale tym razem pomiędzy tymi zbiorami nie ma żadnej krawędzi. Ponownie w grafie nie istnieje skojarzenie o mocy s, natomiast liczba krawędzi wynosi $\binom{2s-1}{2}$.

Okazuje sie, że powyższe przypadki stanowią przypadki graniczne o czym mówi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4 (Erdős, Gallai, 1959) *Jeżeli w grafie G moc największego skojarzenia jest nie większa niż $s-1$, to liczba krawędzi w tym grafie nie przekracza* $\max\left\{\binom{n}{2} - \binom{n-s+1}{2}, \binom{2s-1}{2}\right\}$.

W dowodzie twierdzenia użyjemy operacji *shifting*, która polega na przepychaniu krawędzi w stronę wierzchołków o mniejszych numerach, i która jednocześnie nie powoduje utraty żądanych własności grafu.

Definicja 1 *Niech G będzie grafem o ponumerowanych wierzchołkach, $|V(G)| = n$, oraz $1 \leq i < j \leq n$. Pojedynczą operacją shiftingu nazywamy operację zdefiniowaną dla krawędzi e grafu G w następujący sposób:*

$$S_{ij}(e) = \begin{cases} e - \{j\} \cup \{i\} & , \quad \{j\} \in e, \quad \{i\} \notin e, \quad e - \{j\} \cup \{i\} \notin E(G) \\ e & , \quad \textit{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

O grafie G powiemy ze jest stabilny, jeżeli dla żadnych $1 \leq i < j \leq n$ pojedyncza operacja shiftingu S_{ij} nie zmienia grafu.

Uwaga 4 *Jeśli $\nu(G) \leq t$, to $\nu(S_{ij}(G)) \leq t$. (Zadanie!)*

Dowód Tw. 4 (Akijama, Frankl): Na początku numerujemy wierzchołki grafu i wykonujemy pojedyncze operacje shiftingu aż do momentu, gdy graf stanie się stabilny. Na podstawie powyższej uwagi, w tak zmienionym grafie moc maksymalnego skojarzenia nie może wzrosnąć. A zatem bez straty ogólności możemy założyć, że od początku graf G był stabilny.
Rozważmy rodzinę grafów G_i na n wierzchołkach, $i = 1, \ldots, s$, zdefiniowaną w poniższy sposób:

$$E(G_i) = \{e : e \cap [1, i-1] \neq \emptyset \ \text{ lub } \ e \subset [1, 2s-i]\}.$$

Ponadto rozważmy zbiór s krawędzi $g_j = \{j, 2s-j+1\}$, $j = 1, 2, \ldots, s$. Zauważmy, że istnieje i takie, że $g_i \notin E(G)$. Istotnie, gdyby tak nie było, to w grafie G mielibyśmy skojarzenie o mocy s, co jest sprzeczne z założeniem. Łatwo zauważyć, że z tego iż G jest stabilny oraz $g_i \notin E(G)$ wynika, że $G \subseteq G_i$. Faktycznie, przypuśćmy, że $\{j, k\} \in E(G)$, ale $\{j, k\} \notin E(G_i), j < k$. Z postaci zbioru G_i wynika, że $j \geq i, k \geq 2s+1-i$. Z tych nierówności i ze stabilności, $\{j, 2s+1-i\}$ jest krawędzią G. Korzystając ponownie ze stabilności, $\{i, 2s+1-i\} \in E(G)$. Ale wcześniej założyliśmy inaczej. Zatem faktycznie $G \subset G_i$.

Z powyższego dostajemy oszacowanie na liczbę krawędzi grafu G:

$$|E(G)| \leq \max_{1 \leq i \leq s} |G_i|.$$

Ponieważ $|G_i| = \binom{2s-i}{2} + (i-1)(n-2s+i)$, dostajemy:

$$|E(G)| \leq \max\{|G_1|, |G_s|\} = \max\left\{\binom{2s-1}{2}, \binom{n}{2} - \binom{n-s+1}{2}\right\}.$$

■

Hipoteza 1 *(Erdős '65) Niech H będzie k-jednostajnym hipergrafem. Wówczas:*

$$\forall s \geq 2,\ \forall n \geq ks,\ (\nu(H) \leq s-1) \Rightarrow (|E(H)| \leq \max\{\binom{ks-1}{k}, \binom{n}{k} - \binom{n-s+1}{k}\}).$$

Uwaga 5 *Dla $s = 2$ hipoteza Erdősa sprowadza się do twierdzenia Erdősa-Ko-Rado, czyli: $\nu(H) \leq 1 \Rightarrow |E(H)| \leq \binom{n-1}{k-1}$.*

3 Pokrycia ścieżkowe grafów skierowanych

Przypomnijmy znane twierdzenie minimaksowe.

Twierdzenie 5 (König, 1931) *W grafie 2-dzielnym G, liczba krawędzi $\beta(G)$ w największym skojarzeniu jest równa liczbie wierzchołków $\gamma(G)$ w najmniejszym pokryciu krawędzi.*

Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną grafów. *$\mathcal{F}$-pokryciem* grafu G nazywamy rozpięty podgraf grafu G, którego każda składowa jest izomorficzna z jakimś grafem z rodziny $\mathcal{F}$. Moc pokrycia mierzymy liczbą składowych.

Jeśli $\mathcal{F} = \{K_1, K_2\}$, to interpretując skojarzenia jako pokrycia przy pomocy K_2 i K_1, wnioskujemy na podstawie Twierdzenia 5, że w grafach 2-dzielnych minimalne takie pokrycie ma moc $\beta(G) + n - 2\beta(G) = n - \beta(G) = n - \gamma(G) = \alpha(G)$. (W dowolnym grafie tak być nie musi (np. K_3).)

Jeśli $\mathcal{F} = \{P_1, P_2, \dots\}$, to mamy pokrycia ścieżkami dowolnej długości, inaczej rozpięte podgrafy, których każda składowa jest ścieżką. Łatwo pokazać, że w każdym grafie G istnieje pokrycie co najwyżej $\alpha(G)$ ścieżkami.

Wersja skierowana pokryć ścieżkami jest trudniejsza. Tutaj $\mathcal{F}$ jest rodziną wszystkich ścieżek skierowanych. Jeśli graf skierowany G jest otrzymany z nieskierowanego grafu dwudzielnego poprzez *zgodną* orientację jego krawędzi, to ma on tylko ścieżki skierowane długości 0 lub 1, i ponownie Twierdzenie 5 implikuje, że istnieje pokrycie co najwyżej $\alpha(G)$ ścieżkami.

Twierdzenie 6 (Gallai, Milgram, 1960 {D 2.5.1}) *W każdym grafie skierowanym G istnieje pokrycie co najwyżej $\alpha(G)$ (skierowanymi) ścieżkami.*

Dowód: Dla dowolnego pokrycia $\mathcal{P}$ oznaczmy przez $ter(\mathcal{P})$ zbiór końców ścieżek z $\mathcal{P}$ i nazwijmy go *terminalem* pokrycia $\mathcal{P}$. Mówimy, że $\mathcal{P}$ jest minimalne, jeśli żaden podzbiór właściwy terminalu $ter(\mathcal{P})$ nie jest terminalem jakiegoś pokrycia grafu G.

Pokażemy przez indukcję względem $|G|$, że jeśli $\mathcal{P} = \{P^1, ..., P^m\}$ jest minimalne, to istnieje zbiór niezależny I taki, że $I \cap V(P^i) \neq \emptyset$, $i = 1, ..., m$. To, oczywiście, implikuje, że $m = |\mathcal{P}| \leq \alpha(G)$.

Dla $|G| = 1$ nie ma czego dowodzić. Weźmy dowolny graf skierowany G o $|G| \geq 2$ i jego minimalne pokrycie $\mathcal{P} = \{P^1, ..., P^m\}$. Jeśli $T = ter(\mathcal{P})$ jest zbiorem niezależnym, to koniec dowodu. W przeciwnym razie, bez straty ogólności, można przyjąć, że istnieje łuk z końca P^2 (v_2) do końca P^1 (v_1). Zauważmy, że

I. $P^1 \neq K_1$,
gdyż w przeciwnym razie $T - \{v_2\}$ byłby terminalem pokrycia otrzymanego przez dołączenie ścieżki P^2 do wierzchołka v_1. Niech v będzie poprzednikiem v_1 na ścieżce P^1.

Przyjrzyjmy się pokryciu $\mathcal{P}' = \{P^1 - v_1, P^2, ..., P^m\}$ grafu $G' = G - v_1$. Twierdzimy, że jest ono minimalne w G'. Przypuśćmy, nie wprost, że nie jest. Wtedy istnieje pokrycie $\mathcal{P}''$ grafu G' takie, że $ter(\mathcal{P}'') \subset ter(\mathcal{P}')$. Zauważmy, że

II. $v \notin ter(\mathcal{P}'')$,
gdyż w przeciwnym razie, przedłużając ścieżkę w $\mathcal{P}''$ kończącą się w v do v_1, otrzymalibyśmy pokrycie grafu G o terminalu ściśle zawartm w T - sprzeczność z minimalnością $\mathcal{P}$ w G. Podobnie, zakładając II, można pokazać, że

III. $v_2 \notin ter(\mathcal{P}'')$.
Stąd $|\mathcal{P}''| \leq |\mathcal{P}'| - 2 = |\mathcal{P}| - 2$ i pokrycie $\mathcal{P}''$ wzbogacone o ścieżkę 1-wierzchołkową $\{v_1\}$ jest pokryciem G o terminalu ściśle zawartym w T - sprzeczność z minimalnością $\mathcal{P}$ w G.

Zatem $\mathcal{P}'$ jest minimalne w G' i na podstawie założenia indukcyjnego istnieje zbiór niezależny I przecinający każdą ze ścieżek z $\mathcal{P}'$. Ten sam zbiór przecina każdą ze ścieżek z $\mathcal{P}$ i tym bardziej jest niezależny w G. ■

Wniosek 1 (Tw. Dilwortha) *W każdym zbiorze częściowo uporządkowanym P, minimalna liczba łańcuchów pokrywających P równa się maksymalnej mocy antyłańcucha.*

4 Pokrycie kontra pakowanie cykli

Tw. Königa mówi, że w każdym grafie i dla każdego k, albo istnieje k rozłacznych krawędzi, albo wszystkie krawędzie można pokryć mniej niż k wierzchołkami.

Jakie jeszcze grafy, oprócz K_2, mają podobną własność? Ogólniej, dla danej rodziny grafów $\mathcal{H}$, porównujemy dwa parametry grafowe:

- największą liczbę $k = k(G)$ rozłącznych wierzchołkowo kopii grafów z $\mathcal{H}$, które można znaleźć w G (tzw. $\mathcal{H}$-upakowanie)
- najmniejszą liczbę $s = s(G)$ wierzchołków, które pokrywają wszystkie podgrafy grafu G izomorficzne z tymi z rodziny $\mathcal{H}$ (tzw. $\mathcal{H}$-pokrycie).

Jeśli istnieje funkcja $f(k)$ taka, że dla każdego G

$$s(G) \leq f(k(G))$$

to mówimy, że rodzina $\mathcal{H}$ ma *własność Erdösa-Pósy.*

Tw. Königa mówi, że rodzina jednoelementowa $\mathcal{H} = \{K_2\}$ ma dla grafów dwudzielnych własność Erdősa-Pósy z $f(k) = k$ (jedno z zadań zestawu 2 pokazuje, że dla dowolnych grafów mamy w tym przypadku $f(k) = 2k$). Pokażemy w tym rozdziale, że rodzina wszystkich cykli ma tę własność z $f(k)$ rzędu $k \log k$.

Twierdzenie 7 (Erdős-Pósa 1965 {D 2.3.2.}) *Istnieje funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ taka, że dla każdego naturalnego k każdy graf G zawiera albo k wierzchołkowo rozłącznych cykli albo $f(k-1)$ wierzchołków pokrywających wszystkie cykle.*

Lemat 1 *({D 2.3.1}) Niech s_k będzie ciągiem takim, że $s_1 = 1$ oraz*

$$s_k - 4 \log s_k \geq s_{k-1}.$$

Dla każdego $k \geq 1$, każdy 3-regularny multigraf H o co najmniej s_k wierzchołkach zawiera k wierzchołkowo rozłącznych cykli.

Powyższe waunki narzucone na ciąg s_k spełnia, między innymi, ciąg

$$s_k = 4k(logk + \log\log k + 4), \qquad k \geq 2.$$

(Szczegóły w podręczniku.)

Dowód Twierdzenia 7: Pokażemy to twierdzenie z $f(k) = k + s_{k+1}$, gdzie s_k jest takie jak w Lemacie 1. Możemy założyć, że G ma cykl, ale nie ma k rozłącznych cykli. Niech H będzie maksymalnym podgrafem z

$$2 \leq \delta(H) \leq \Delta(H) \leq 3.$$

Z maksymalności H wynika że

(i) każdy cykl w G przecina $V(H)$,

(ii) nie istnieje H-ścieżka o obu końcach stopnia 2 w $V(H)$.

Niech U będzie zbiorem wierzchołków stopnia 3 w H, a $W = V(H) \setminus U$. Z powyższych własności H wynika, że jeśli cykl C w G spełnia warunek $V(C) \cap U = \emptyset$, to $C \subseteq H$, tzn. C jest izolowanym cyklem w H (inaczej 2-regularna składową), lub $|V(C) \cap W| = 1$.

Niech $\mathcal{C}$ będzie rodziną cykli C w G takich, że

$$V(C) \cap U = \emptyset \quad \text{i} \quad |V(C) \cap W| = 1.$$

Niech $Z \subseteq W$ będzie zbiorem wierzchołków z W leżących na cyklach z $\mathcal{C}$. Dla każdego $z \in Z$ wybierzmy jeden cykl $C_z \in \mathcal{C}$ taki, że $z \in V(C_z)$ i oznaczmy $\mathcal{C}' = \{C_z : z \in Z\}$.

Z uwagi na maksymalność H (własność (ii)), cykle z rodziny $\mathcal{C}'$ są rozłączne (sprawdzić rysunkowo!). Niech $\mathcal{D}$ będzie rodziną izolowanych cykli w H, rozłącznych z Z. Rodzina $\mathcal{C}' \cup \mathcal{D}$ składa się z rozłącznych cykli, więc $|\mathcal{C}' \cup \mathcal{D}| \leq k - 1$. Rozpatrzmy zbiór $X = Z \cup Y$, gdzie Y zawiera po 1 wierzchołku z każdego cyklu w $\mathcal{D}$. Mamy więc $|X| = |\mathcal{C}' \cup \mathcal{D}| \leq k - 1$.

Zauważmy, że zbiór wierzchołków $X \cup U$ pokrywa wszystkie cykle w G. Trzeba jeszcze pokazać, że $|U| < s_k$. W tym celu stosujemy Lemat 1 do grafu H' otrzymanego z H przez zastąpienie wszystkich indukowanych ścieżek krawędziami (operacja odwrotna do brania topologicznego minora – nazwijmy ją *redukcją topologiczną*). Mamy $V(H') = U$. Gdyby $|U| \geq s_k$, to H' miałby k rozłącznych cykli, więc H też -sprzeczność. ∎

Dowód Lematu 1: Indukcja względem k (przypadek $k = 1$ wynika z jednego z zadań). Niech $k \geq 2$, a C będzie najkrótszym cyklem w H. Łatwo pokazać, że $|C| \leq 2log|H|$ (**Zadanie**).

Pokażemy, że pewien podgraf indukowany H' podgrafu $H - V(C)$ ma tylko stopnie 2 i 3, a po redukcji topologicznej, otrzymany multigraf H'' jest 3-regularny o co najmniej

$$|H| - 2|C| \geq s_k - 4 \log s_k \geq s_{k-1}$$

wierzchołkach. Wtedy, na podstawie założenia indukcyjnego, H'' będzie mieć $k-1$ rozłącznych cykli, a więc H', a zatem i $H - V(C)$, też będzie mieć $k-1$ rozłącznych cykli, które wraz z C utworzą k rozłącznych cykli w H.

W tym celu, tworzymy rekurencyjnie podział $V(H) = V_1 \cup V_2$. Początkowo $V_1 := V(C)$, a $e(V_1, V_2) := m \leq |C|$, gdzie $e(V_1, V_2)$ jest liczbą krawędzi między V_1 a V_2. Jeśli w $H[V_2]$ jest wierzchołek stopnia 0 lub 1, to przerzucamy go do V_1. W każdym kroku zmniejszamy $e(V_1, V_2)$. Ostatecznie, po $n \leq m$ krokach, mamy $e(V_1, V_2) \leq m - n$, i konsekwentnie w $H[V_2]$ jest co najwyżej $m - n$ wierzchołków stopnia 2 (bo każdy z nich jest incydentny z dokładnie jedną krawędzią o drugim końcu w V_1). Zatem podgraf $H[V_2] = H - V_1$, nie mając wcale stopni 0 i 1, redukuje się topologicznie do multigrafu 3-regularnego H'' o co najmniej

$$|H| - |C| - n - (m - n) \geq |H| - 2|C|$$

wierzchołkach. ■

5 Drzewiastość i lesistość

Inna miara spójności: *drzewiastość* = maksymalna liczba krawędziowo rozłącznych rozpiętych drzew.

Kiedy istnieje k takich drzew w grafie?

Warunek konieczny: Dla każdego podziału V na r części, G ma co najmniej $(r-1)k$ krawędzi „pomiędzy".

Twierdzenie 8 (Tutte, 1961; Nash-Williams, 1961, {D 2.4.1}) *Multigraf G zawiera k rozłącznych rozpiętych drzew wgdy każdy podział Π zbioru V ma co najmniej $k(|\Pi|-1)$ „międzykrawędzi".*

Wniosek 2 *Jeśli G jest krawędziowo $2k$-spójny, to G ma k rozłącznych rozpiętych drzew.*

Dowód: Dla każdego podziału Π, na podstawie $2k$-spójności, mamy co najmniej $\frac{1}{2}|\Pi|2k > k(|\Pi|-1)$ „międzykrawędzi". ■

Definicja podziału grafu G na rozpięte podgrafy $G_1, ..., G_k$: $E(G) = E(G_1) \cup ... \cup E(G_k)$.

Drzewiastość grafu wiąże się z problemem: znaleźć podział grafu na jak najwięcej spójnych, rozłącznych, rozpiętych podgrafów (bo drzewa są minimalnymi spójnymi grafami).

Problem dualny: znaleźć podział grafu na jak najmniej acyklicznych podgrafów (bo drzewa są maksymalnymi acyklicznymi grafami).

Inaczej, przy danym k, które grafy można podzielić (rozłożyć) na nie więcej niż k lasów?

Komentarz: Spójność jest własnością rosnącą, a cykliczność – malejącą.

Warunek konieczny: Dla każdego $\emptyset \neq U \subseteq V$, zachodzi $||G[U]|| \leq k(|U|-1)$.

Twierdzenie 9 (Nash-Williams, 1964,{D 2.4.4}) *Multigraf G można podzieć na co najwyżej k lasów wgdy dla każdego $\emptyset \neq U \subseteq V$, zachodzi $||G[U]|| \leq k(|U|-1)$.*

Najmniejsze k jak w Twierdzeniu 9 nosi nazwę *lesistości grafu* (ang. *arboricity*).

Dowody obu powyższych twierdzeń (w wersji pochodzącej od Madera) opierają sie na tym samym lemacie.

Lemat 2 *Niech* $F_1^0, \ldots, F_k^0$ *będzie zbiorem* k *krawędziowo-rozłącznych lasów w grafie* G *o maksymalnej łącznej liczbie krawędzi* $\sum_{i=1}^k ||F_i^0||$ *i niech* $e^0 \in E(G) \setminus \bigcup_{i=1}^k E(F_i^0)$*. Wtedy istnieje* $U \subseteq V(G)$ *taki, że* $U \supset e^0$ *oraz, dla każdego* $i = 1, \ldots, k$*, indukowany podgraf* $F_i^0[U]$ *lasu* F_i^0 *jest spójny.*

Pokażemy teraz jak szybko wynikają z niego oba twierdzenia.
Dowód Twierdzenia 9: Przypuśćmy, że multigrafu G nie można podzielić na k lasów. Wtedy, jeśli $F_1^0, \ldots, F_k^0$ oraz e_0 i U są takie jak w Lemacie 2, to $||G[U]|| \geq k(|U| - 1) + 1$ – sprzeczność. ■

Dowód Twierdzenia 8: Pokażemy tylko nietrywialną implikacje. Jest to dowód indukcyjny względem $|G|$. Łatwo sprawdzić, że implikacja zachodzi dla multigrafów G o $|G| = 2$. Niech G będzie grafem o $|G| > 2$ i załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla wszystkich grafów o liczbie wierzchołków mniejszej niż $|G|$.

Niech $F_1^0, \ldots, F_k^0$ będą jak w Lemacie 2. Jeśli wszystkie F_i^0 są drzewami, to koniec dowodu. W przeciwnym razie, $\sum_{i=1}^k ||F_i^0|| < k(|G| - 1)$, ale z założenia twierdzenia, biorąc podział zbioru $V(G)$ na jednoelementowe podzbiory, otrzymujemy $||G|| \geq k(|G| - 1)$. Zatem istnieje krawędź $e^0 \in E(G) \setminus \bigcup_{i=1}^k E(F_i^0)$.

Niech U będzie zbiorem jak w Lemacie 2. Ściągając go do jednego wierzchołka v_U otrzymujemy graf $G|U$. Każdy podział Π wierzchołków grafu $G|U$ indukuje podział Π' wierzchołków grafu G, na tę samą liczbę części i o tej samej liczbie „międzykrawędzi", których z założenia jest co najmniej $k(|G|-1)$. Ponieważ $|U| \geq 2$, mamy $|G|U| < |G|$ i na podstawie założenia indukcyjnego, $G|U$ ma k krawędziowo rozłącznych rozpiętych drzew $T_1, \ldots, T_k$. Zastępując w drzewie T_i wierzchołek v_U przez drzewo $F_i^0[U]$ otrzymujemy zbiór krawędziowo rozłącznych rozpiętych drzew w G. ■

Dowód Lematu 2:

Dla dowolnej k-tki lasów $F = (F_1, \ldots, F_k)$ niech $E(F) = \bigcup_{i=1}^k E(F_i)$. Zauważmy, że jeśli F jest k-tką lasów o maksymalnej wartości $|E(F)|$, to dla każdej krawędzi $e \in E(G) \setminus E(F)$ i dla każdego i, graf $F_i + e$ zawiera cykl C_e. Mówimy, że $F' = (F_1', \ldots, F_k')$ jest otrzymana z F poprzez zamianę e' na e w lesie F_i, jeśli $e' \in C_e$, $F_i' = F_i + e - e'$ oraz $F_j' = F_j$ dla wszystkich $j \neq i$. Zauważmy też, że składowa F_i zawierająca e' ma po zamianie ten sam zbiór wierzchołków. Zatem, dla każdej pary x, y należącej do tej samej składowej lasu F_i', jedyna xy-ścieżka w F_i' (oznaczenie $xF_i'y$) odpowiada wzajemnie jednoznacznie jedynej xy-ścieżce w F_i (oznaczenie xF_iy).

Niech $F^0 = (F_1^0, \ldots, F_k^0)$ będzie k-tką lasów grafu G jak w założeniach lematu. Niech, ponadto, $\mathcal{F}'$ będzie rodziną wszystkich k-tek lasów otrzymanych z F^0 w wyniku dowolnej serii zamian. Oznaczmy przez E^0 zbiór tych krawędzi grafu G, które są poza przynajmniej jedną k-tką z $\mathcal{F}'$, tj. $E^0 = \bigcup_{F \in \mathcal{F}'}(E(G) \setminus E(F))$. Niech $G^0 = G[E^0] = (V(G), E^0)$ będzie podgrafem G złożonym z krawędzi ze zbioru E^0. Weźmy $e^0 \in E(G) \setminus E(F^0)$. Ponieważ $F^0 \in \mathcal{F}'$, więc $e^0 \in E^0$. Niech C^0 będzie składową G^0 zawierającą e^0. Twierdzimy, że $U = V(C^0)$, tzn., że $F_i^0[U]$ jest spójny, $i = 1, \ldots, k$.

Fakt 4 *Niech k-tka lasów F' będzie otrzymana z F przez zamianę w lesie F_i. Jeśli $xF_i'y \subset C^0$, to $xF_iy \subset C^0$.*

Ten fakt pozwala szybko zakończyć dowód lematu. W celu wykazania spójności podgrafu $F_i^0[U]$ wystarczy pokazać, że dla każdej krawędzi $xy \in C^0$ mamy $xF_i^0y \in C^0$. Niech $e = xy \in C \subset E^0$. Istnieje liczba naturalna s oraz k-tki lasów $F^1, \ldots, F^s$ takie, że F^r jest otrzymana z F^{r-1} w wyniku zamiany w dowolnym lesie, $r = 1, \ldots, s$, oraz $e \in E(G) \setminus E(F^s)$. Niech F' będzie k-tką otrzymaną z F^s w wyniku dodania e do F_i^s. Krawędź e jest xy-ścieżką w $F_i' \cap C^0$, więc na podstawie Faktu 4, ścieżka $xF_i^sy \subset C^0$. Jeśli F^s otrzymano z F^{s-1} w wyniku zamiany w lesie F_j^s, $j \neq i$, to $xF_i^{s-1}y = xF_i^sy \subset C^0$. W przeciwnym razie, stosujemy ponownie Fakt 4, więc tak czy owak $xF_i^{s-1}y \subset C^0$. Powtarzając to samo rozumowanie jeszcze $s-1$ razy, w końcu osiągamy nasz cel: $xF_i^0y \subset C^0$. ■

Dowód Faktu 4: Niech $e = uw \in E(F_i') \setminus E(F)$. Bez straty ogólności można założyć, że $e \in xF_i'y$, bo w przeciwnym razie $xF_iy = xF_i'y$ i nie ma czego dowodzić. Wystarczy pokazać, że $vF_iw \in C^0$ bo wtedy $(xF_i'y - e) \cup vF_iw$ jest spójnym podgrafem $F_i \cap C^0$, który zawiera x, y a więc też xF_iy. Dowolną krawędź $e' \in vF_iw$ można zamienić na e, zatem $e' \in E^0$. Stąd, $vF_iw \subseteq G^0$, a ponieważ $v, w \in xF_i'y \subseteq C^0$, to co więcej $vF_iw \subseteq C^0$. ■

6 2-spójność, 3-spójność

Zacznijmy od pojęć podstawowych.

$A-B$ **ścieżka.** Niech $A, B \subseteq V(G)$. $A-B$ ścieżką nazywamy dowolną ścieżkę o początku w A i końcu w B, która nie zawiera żadnych innych wierzchołków z $A \cup B$.

H**-ścieżka.** Jeśli H jest podgrafem G, a $A = B = V(H)$, to $A-B$ ścieżkę nazywamy H-ścieżką.

Spójność. Graf G jest spójny, gdy każde dwa jego wierzchołki v, u są połączone ścieżką, tzn. istnieje $A-B$ scieżka, gdzie $A = \{u\}$ i $B = \{v\}$. Równoważnie, dla każdego podziału $V(G) = U \cup W$ istnieje krawędź o jednym końcu w U, a drugim w W.

Składowe spójności. Każdy maksymalny podgraf spójny grafu G nazywamy składową. Każdy wierzchołek należy do dokładnie jednej składowej.

Zbiór rozdzielający. Niech $A, B \subseteq V$, $X \subseteq V \cup E$. Mówimy, że X rozdziela A i B w G, jeśli każda $A-B$ ścieżka ma wspólny element z X. Mówimy, że X jest zbiorem rozdzielającym G (albo X rozdziela G), gdy X rozdziela w G jakieś dwa wierzchołki spoza X.

Cięcia. Gdy zbiór X rozdzielający graf G składa się tylko z wierzchołków (tylko z krawędzi) to nazywamy go też cięciem wierzchołkowym (krawędziowym).

k**-spójność.** Graf G jest k-spójny, gdy $|G| > k$ i G nie ma cięcia wierzchołkowego mocy mniejszej niż k. Największą liczbę naturalną k taką, że G jest k-spójny nazywamy stopniem spójności i oznaczamy przez $\kappa(G)$. Zatem graf jest k-spójny wgdy $\kappa \geq k$.

Krawędziowa k**-spójność.** Graf G jest k-krawędziowo-spójny, gdy $|G| > 1$ i G nie ma cięcia krawędziowego mocy mniejszej niż k. Największą liczbę naturalną k taką, że G jest k-krawędziowo-spójny nazywamy stopniem spójności krawędziowej i oznaczamy przez $\kappa'(G)$. Zatem graf jest k-krawędziowo-spójny wgdy $\kappa' \geq k$.

Dla każdegio grafu zachodzą nierówności:

$$\kappa \leq \kappa' \leq \delta$$

Wierzchołek cięcia. To wierzchołek rozdzielający dwa inne wierzchołki. Inaczej, 1-elementowe cięcie wierzchołkowe.

Most (krawędź cięcia). To krawędź rozdzielająca jej końce. Inaczej, 1-elementowe cięcie krawędziowe.

Fakt 5 (D 3.1.3) *G jest 2-spójny wgdy można go skonstruować zaczynając od cyklu i kolejno dodając H-ścieżki do aktualnego grafu H.*

Dowód: W jedną stronę jest to oczywiste. Podamy dowód w drugą. Jako graf 2-spójny, G ma $\delta(G) \geq 2$, więc zawiera cykl. Niech H będzie maksymalnym podgrafem grafu G konstruowalnym w sposób opisany w tekście Faktu 5. H musi być podgrafem indukowanym, bo każda krawędź $xy \in E(G) \setminus E(H)$, gdzie $x, y \in V(H)$, jest H-ścieżką. Przypuśćmy nie wprost, że $H \neq G$. Wtedy na podstawie spójności G, istnieje krawędź vw taka, że $v \in V(G) \setminus V(H)$ a $w \in V(H)$. Ale G jest 2-spójny, więc podgraf $G - w$ zawiera $v - V(H)$ ścieżkę P. Ta ścieżka, przedłużona o krawędź wv jest H-ścieżką – sprzeczność z maksymalnością wyboru podgrafu H. ■

Kontrakcja (ściągnięcie) krawędzi. To operacja polegająca na zastąpieniu krawędzi $e = xy$, jednym wierzchołkiem v_e i zachowaniu wszystkich krawędzi wychodzących z x lub y, nie wprowadzając przy tym pętli ani krawędzi wielokrotnych. Formalnie, nowy graf to $G|e = (V_e, E_e)$, gdzie

$$V_e = (V - \{x, y\}) \cup \{v_e\}$$

a

$$E_e = \{vw \in E : \{v, w\} \cap \{x, y\} = \emptyset\} \cup \{v_e w : xw \in E \text{ lub } yw \in E, \quad w \neq x, y\}.$$

Lemat 3 (D 3.2.1) *Jeśli G jest 3-spójny oraz $|G| > 4$, to G ma krawędź taką, że $G|e$ też jest 3-spójny.*

Dowód: Przypuśćmy nie wprost, że dla każdej krawędzi $xy \in E(G)$, graf $G|xy$ ma cięcie wierzchołkowe S, gdzie $|S| \leq 2$; co wiecej $v_{xy} \in S$ i $|S| = 2$. Niech $S = \{v_{xy}, z\}$. Wtedy $T = \{x, y, z\}$ jest minimalnym cięciem wierzchołkowym w G. Zatem, każdy wierzcholek z T ma sąsiada w każdej składowej C grafu $G - T$. Wybierzmy krawędź xy, trzeci wierzchołek z oraz składową C w ten sposób by $|C|$ była minimalna.

Niech v będzie sąsiadem z w C. Ponieważ $G|zv$ nie jest 3-spójny, to istnieje w taki, że $\{z, v, w\}$ jest minimalnym cięciem w G. Ponieważ $xy \in E(G)$, to jasne jest, że $G - \{z, v, w\}$ ma składową D taką, że $D \cap \{x, y\} = \emptyset$. Niech v' będzie sąsiadem v w D. Ponieważ v' jest różny od x, y, z, to musi należeć do C, a stąd $D \subseteq C$ (wyjaśnienie: każdy $v'' \in D$ jest połączony ścieżką z v – poprzez v' – która omija $\{x, y, z\}$; zatem v'' należy do tej samej składowej w $G - T$ co v, czyli do C.) Jednak $v \in C \setminus D$, więc $|D| < |C|$ – sprzeczność. ■

Twierdzenie 10 (Tutte, 1961 { D 3.2.2 }) *G jest 3-spójny wgdy istnieje ciąg*
$G_0 = K_4, G_1, ..., G_{n-1}, G_n = G$ *taki, że dla każdego* $i < n$ *istnieje w* G_{i+1} *krawędź* xy *spełniająca warunki:* $d(x), d(y) \geq 3$ *oraz* $G_i = G_{i+1}|xy$.

Dowód: Implikacja w jedną stronę wynika natychmiast z Lematu 3. W drugą stronę wystarczy pokazać, że jeśli G_i jest 3-spójny, to G_{i+1} też. Przypuśćmy nie wprost, że istnieje cięcie wierzchołkowe S w G_{i+1} mocy $|S| \leq 2$. Niech C_1, C_2 będą dwoma składowymi grafu $G_{i+1} - S$. Bez straty ogólności można przyjąć, że $\{x, y\} \cap V(C_1) = \emptyset$. Gdyby $V(C_2) \supseteq \{x, y\}$ lub gdyby istniał $v \in V(C_2)$, $v \neq x, y$, to graf $G_i = G_{i+1}|xy$ nie byłby 3-spójny. Zatem $V(C_2) = \{x\}$ lub $V(C_2) = \{y\}$, ale to przeczy założeniu, że $d(x), d(y) \geq 3$. ■

Wniosek 3 (Wheel Theorem, Tutte) *G jest 3-spójny wgdy istnieje ciąg* $G_0 = K_4, G_1, ..., G_{n-1}, G_n = G$ *taki, że dla każdego* $i < n$, G_{i+1} *powstaje z* G_i *poprzez rozszczepienie dowolnego wierzchołka* v *na dwa sąsiednie wierzchołki* v' *i* v'', *połączone dowolnie z sąsiadami* v, *ale tak by* $d(v'), d(v'') \geq 3$, *oraz by* $N_{G_{i+1}}(v') \cup N_{G_{i+1}}(v'') = N_{G_i}(v)$. ■

7 Twierdzenie Mengera

Twierdzenie 11 (Menger, 1927 {D 3.3.1.}) *Niech G będzie grafem i niech $A, B \subseteq V(G)$. Wtedy minimalna liczba wierzchołków rozdzielających A i B równa się maksymalnej liczbie rozłącznych $A - B$ ścieżek.*

Dowód: Zauważmy, że nierówność min $\geq$ max jest oczywista, bo dowolny zbiór rozdzielający musi zawierać po 1 wierzchołku z każdej ścieżki z dowolnej rodziny rozłącznych ścieżek. Niech $k = k(G, A, B)$ będzie minimalną liczbą wierzchołków rozdzielających A i B. Wystarczy pokazać, że G ma k rozłącznych $A - B$ ścieżek.

Stosujemy indukcję względem $||G|| = |E(G)|$. Jeśli G jest pusty, to $k = |A \cap B|$ i tyleż jest rozłącznych (trywialnych) $A - B$-ścieżek.

Niech teraz $e = xy \in E(G)$. Przypuśćmy, że w G nie ma k rozłącznych $A - B$-ścieżek. Pokażemy najpierw, że wtedy istnieje zbiór X rozdzielający A i B taki, że $e \subseteq X$ i $|X| = k$.

Rozważmy graf $G|e$, a w nim zbiory A' i B', gdzie dla $C = A, B$, $C' = C$ gdy $C \cap e = \emptyset$ oraz $C' = C \setminus (C \cap e) \cup \{v_e\}$, gdy $C \cap e \neq \emptyset$. Skoro w G nie ma k rozłącznych $A - B$-ścieżek, to w $G|e$ nie ma k rozłącznych $A' - B'$-ścieżek.

Z założenia indukcyjnego, $G|e$ ma zbiór Y, który rozdziela A' i B' i ma moc $|Y| < k$. Jeśli $v_e \notin Y$, to Y rodziela A i B w G – sprzeczność. Zatem $v_e \in Y$, ale wtedy zbiór $X = Y \setminus \{v_e\} \cup e$ jest szukanym zbiorem rozdzielającym w G. Mamy $|X| \leq k$, więc na podstawie definicji k, $|X| = k$.

Teraz spójrzmy na graf $G - e$. Ponieważ $e \subseteq X$, każdy zbiór rozdzielający A i X w $G - e$ rozdziela również A i B w G, więc ma co najmniej k wierzchołków. Z założenia indukcyjnego, w $G - e$ jest więc k rozłącznych $A - X$ ścieżek, i podobnie, jest tam k rozłącznych $B - X$ ścieżek. Ponieważ X rozdziela A i B, te dwie rodziny ścieżek nie przecinają się poza X i na ich bazie można łatwo zbudować k rozłącznych $A - B$ ścieżek. (Logiczna struktura tego dowodu jest następująca: z koniunkcji $(p \wedge \neg q)$ wywnioskowaliśmy q, ale implikacja $(p \wedge \neg q) \Rightarrow q$ jest logicznie równoważna implikacji $p \Rightarrow q$, która była naszym celem.) ∎

Alternatywny dowód Tw. 11 (Böhme, Göring, Harant, 1999):

Udowodnimy mocniejszy fakt. Niech $Kon(\mathcal{P})$ będzie zbiorem końców (w B) wszystkich ścieżek danej rodziny $A - B$ ścieżek $\mathcal{P}$. Niech G będzie grafem i $A, B \subseteq V(G)$. Dla każdej rodziny $A - B$ ścieżek $\mathcal{P}$ takiej, że $|\mathcal{P}| < k = k(G, A, B)$ istnieje rodzina $A - B$ ścieżek $\mathcal{Q}$ taka, że $|\mathcal{Q}| = |\mathcal{P}| + \infty$ oraz $Kon(\mathcal{P}) \subset Kon(\mathcal{Q})$.

Przy ustalonych G i A, dowód jest indukcyjny względem $|G - B|$. Przypadek $|G - B| = 0$ jest oczywisty. Przyjmijmy teraz, że $B \neq V(G)$ i że $\mathcal{P}$ jest rodziną mniej niż k $A - B$ ścieżek. Niech R będzie dowolną $A - B$ ścieżką omijającą $Kon(\mathcal{P})$. Taka ścieżka istnieje bo żaden zbiór mocy $k - 1$ nie rozdziela A i B.

Jeśli R omija wszystkie ścieżki w $\mathcal{P}$, to rodzinę $\mathcal{Q}$ otrzymujemy dodając R do $\mathcal{P}$. W przeciwnym razie niech x będzie ostatnim wierzchołkiem ścieżki R wspólnym z jakąś ścieżką P z $\mathcal{P}$. Zastąpmy ścieżkę P przez Px w $\mathcal{P}$, otrzymując nową rodzinę $\mathcal{P}'$ i jednocześnie rozszerzmy B o wierzchołki należące do podścieżek xP i xR i nazwijmy nowy zbiór B'. Zatem $\mathcal{P}'$ jest rodziną $k-1$ $A-B'$ ścieżek. Ponadto, $k(G, A, B') \geq k(G, A, B)$ i $|G-B'| < |G-B|$, więc z założenia indukcyjnego, istnieje rodzina $\mathcal{Q}'$ $A - B'$ ścieżek, taka, że $|\mathcal{Q}'| = |\mathcal{P}'| + 1$ oraz $Kon(\mathcal{Q}') \supset Kon(\mathcal{P}')$.

Zatem istnieją w $\mathcal{Q}'$ ścieżki P_x i P_y takie, że P_x kończy się w x, a P_y kończy się w pewnym wierzchołku $y \notin Kon(\mathcal{P}')$. Obiecaną rodzinę $\mathcal{Q}$ konstruujemy następująco:

I. Jeśli $y \notin xP$, to wymieniamy ścieżki P_x i P_y na ich wydłużenia $P_x \cup xP$ i $P_y \cup yR$;

II. Jeśli $y \in xP$, to odwrotnie: zastępujemy P_x i P_y ścieżkami $P_x \cup xR$ i $P_y \cup yP$. ∎

Zbiór $a - B$ ścieżek nazywamy wachlarzem (fan) jeśli każde dwie z nich mają tylko 1 wspólny wierzchołek (a).

Wniosek 4 (D 3.3.4) *Dla $B \subset V$ i $a \in V \setminus B$, minimalna liczba wierzchołków rozdzielających a od B i różnych od a jest równa maksymalnej mocy $a - B$ wachlarza.*

Wniosek 5 (D 3.3.5) *Niech a i b będą różnymi wierzchołkami w G.*

(i) Jeśli $ab \notin E$, to minimalna liczba wierzchołków rozdzielających a od b, ale różnych od a i b, jest równa maksymalnej liczbie niezależnych $a - b$ ścieżek.

(ii) Minimalna liczba krawędzi rozdzielających a od b jest równa maksymalnej liczbie krawędziowo rozłącznych $a - b$ ścieżek.

Twierdzenie 12 (Globalne Tw. Mengera {D 3.3.6}) *(i) G jest k-spójny wgdy zawiera k niezależnych ścieżek pomiędzy każdą parą różnych wierzchołków;*

(ii) G jest krawędziowo k-spójny wgdy zawiera k krawędziowo rozłącznych ścieżek pomiędzy każdą parą różnych wierzchołków.

Dowód: (i) Jeśli G ma k niezależnych ścieżek pomiędzy każdą parą wierzchołków, to $|G| > k$ i nie ma cięcia wierzchołkowego mocy mniejszej od k. Zatem G jest k-spójny.

Przypuśćmy, że k-spójny graf G ma dwa wierzchołki a, b nie połączone k niezależnymi ścieżkami. Na podstawie Wniosku 5, $ab \in E(G)$. W grafie $G' = G - ab$, są co najwyżej $k-2$ niezależne ścieżki pomiĘdzy a i b. Ponownie z Wniosku 5, a i b można rozdzielić w G' zbiorem X mocy $k-2$. Ponieważ $|G| = |G'| > k$, istnieje $v \notin X \cup \{a, b\}$. Zbiór X musi rozdzielać w G' v od a lub b. Przyjmijmy, że X rozdziela w G' v i a. Wtedy jednak zbiór $X \cup \{b\}$ mocy $k-1$ rozdziela w G v i a – sprzeczność z k-spójnością G. ■

8 „Linking"

Definicja grafu *k-zwartego (ang.: k-linked)*. Graf G nazywamy k-zwartym, gdy $|G| \geq 2k$ oraz, dla każdego ciągu różnych $2k$ wierzchołków $s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k$, istnieje k rozłącznych ścieżek $P_1, \ldots, P_k$, gdzie P_i jest $s_i - t_i$ ścieżką, $i = 1, \ldots, k$. Jest to własność mocniejsza od k-spójności.

Twierdzenie 13 (Jung 1970; Larman & Mani, 1970, {D 3.5.2}) *Istnieje funkcja f taka, że dla każdego k, każdy $f(k)$-spójny graf jest k-zwarty.*

W dowodzie Tw. 13 jako lemat wykorzystuje się inne twierdzenie o zawieraniu klik topologicznych, które trzeba poprzedzić serią definicji:

Podpodział grafu. Podpodziałem grafu X nazywamy *każdy* graf Y otrzymany z X przez zastąpienie (niektórych) jego krawędzi niezależnymi ścieżkami. Piszemy wtedy $Y = TX$. UWAGA: TX to nie jeden graf lecz cała, nieskończona rodzina.

Topologiczny minor. Jeśli $Y = TX \subseteq G$, to mówimy, że X jest topologicznym minorem grafu G (X nie musi być podgrafem grafu G).

Przykład: $X = K_3$ jest topologicznym minorem grafu Petersena, bo jego podpodziałem jest $Y = C_5$, zawarty w grafie Petersena.

Wierzchołki główne i dodatkowe. Jeśli $Y = TX$ oraz $\delta(X) \geq 3$, to zbiór $V(X) \subseteq V(Y)$ nazywamy zbiorem wierzchołków głównych, a $V(Y) \setminus V(X)$ zbiorem wierzchołków pomocniczych. (Łatwo je odróżnić: te drugie mają stopień dwa.)

Klika topologiczna. Jeśli $X = K_r$, to każdy minor topologiczny $Y = TX \subseteq G$ nazywamy kliką topologiczną w G.

Ściągnięcie (kontrakcja) podzbioru wierzchołków. To operacja polegająca na zastąpieniu podzbioru wierzchołków $U \subseteq V(G)$ indukującego podgraf spójny, jednym, nowym wierzchołkiem v_U, zachowując wszystkie krawędzie biegnące w G z U na zewnątrz (usuwając jednak krawędzie równoległe). Nowy graf oznaczamy przez $G|U$.

Lemat 4 (Mader 1967,{D 3.5.1}) *Istnieje funkcja h taka, że każdy graf G o średnim stopniu co najmniej $h(r)$ zawiera TK_r.*

Dowód: Dla $r \leq 2$ jest to prawdą, nawet biorąc $h(r) = 1$. Załóżmy więc, że $r \geq 3$. Pokażemy indukcją względem $m = r, \ldots, \binom{r}{2}$, że każdy graf spójny G o średnim stopniu $d(G) \geq 2^m$ zawiera topologiczny minor TX jakiegoś grafu X o $|X| = r$ i $||X|| = m$. Dla $m = \binom{r}{2}$, otrzymamy tezę twierdzenia z $h(r) = 2^{\binom{r}{2}}$.

Przypadek $m = r$ jest łatwy. Na podstawie Faktu 6 poniżej, G zawiera podgraf H o minimalnym stopniu 2^{r-1}, więc zawiera cykl długości co najmniej $2^{r-1} + 1 > r$. Każdy taki cykl jest minorem topologicznym cyklu C_r, który jest szukanym grafem X.

Załóżmy teraz, że $r < m \leq \binom{r}{2}$, G jest spójny, $d(G) \geq 2^m$. Niech U będzie maksymalnym podzbiorem zbioru $V(G)$ takim, że $G[U]$ jest spójny oraz $d(G|U) \geq 2^m$. (U istnieje, bo dla każdego $v \in V(G)$, mamy $G|\{v\} = G$.) Zauważmy, że $U \neq V(G)$, bo wtedy $d(G|U) = d(K_1) = 0$.

Niech $H = G[N(U)]$, gdzie $N(U) = N_G(U) \setminus U$ jest (niepustym) zbiorem sąsiadów wierzchołków z U, którzy nie należą do U. Gdyby $\delta(H) \leq 2^{m-1} - 1$, to można by powiększyć zbiór U, dodając do niego wierzchołek v o minimalnym stopniu w H. Wtedy $e(G|U \cup \{v\}) = e(G|U) - 1 - d_H(v)$ i w konsekwencji $d(G|U \cup \{v\}) \geq 2^m$ – sprzeczność z maksymalnością U (podgraf $G|U \cup \{v\}$ jest spójny).

Zatem $d(H) \geq \delta(H) \geq 2^{m-1}$ i z założenia indukcyjnego, $H \supseteq TZ$, gdzie $|Z| = r$, $||Z|| = m - 1$. Niech x, y będą wierzchołkami głównymi TZ, nie połączonymi krawędzią w Z. Ponieważ $x, y \in N(U)$ oraz $G[U]$ jest spójny, to istnieje $x - y$ ścieżka w G o wszystkich wierzchołkach wewnętrznych w U, czyli poza H. Dodając ją do TZ otrzymujemy minor topologiczny TX, gdzie $X = Z \cup \{xy\}$. ∎

Fakt 6 ({D 1.2.2}) *Każdy graf G o $||G|| \geq 1$ ma podgraf H taki, że*

$$\delta(H) > \frac{1}{2}d(H) \geq \frac{1}{2}d(G)$$

Dowód Twierdzenia 13: Twierdzenie udowodnimy z $f(k) = h(3k) + 2k$, gdzie h jest funkcją z Lematu 4. Niech G będzie grafem $f(k)$-spójnym. Wtedy

$$d(G) \geq \delta(G) \geq \kappa(G) \geq h(3k).$$

Niech $K = TK_{3k}$ będzie topologiczną kliką rzędu $3k$ w G, gwarantowaną przez Lemat 4, i niech U będzie zbiorem jej $3k$ wierzchołków węzłowych.

Niech $A = \{s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k\}$ będzie zbiorem różnych wierzchołków w G. Ponieważ $\kappa(G) \geq 2k$, to na podstawie Tw. Mengera istnieje rodzina $\mathcal{R}$ złożona z $2k$ rozłącznych A–U ścieżek. Wybierzmy ją tak, by zminimalizować liczbę

$$| \bigcup_{R \in \mathcal{R}} E(R) \setminus E(K) | .$$

Niech

$$\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_k, Q_1, \ldots, Q_k\},$$

gdzie P_i ma koniec w s_i, a Q_i – w t_i, $i = 1, \ldots, k$. Oznaczmy ich drugie końce (te w U) przez s^i, t^i, odpowiednio, a pozostałe wierzchołki w U przez $u_1, \ldots, u_k$.

Niech L_i będzie U-ścieżką łączącą u_i z s^i w K. Niech v_i będzie wierzchołkiem L_i, najbliższym u_i, leżącym na jakiejkolwiek ścieżce R z $\mathcal{R}$. Z minimalności $\mathcal{R}$, R musi się pokrywać z L_i na całym odcinku zaczynającym się w v_i, (a kończącym w s^i), tzn. $v_i R = v_i L_i$. W przeciwnym razie, podścieżka $v_i R$ zawierałaby krawędź spoza K, i zastępując tę podścieżkę w R przez $v_i L_i u_i$, tzn. przez podścieżkę L_i pomiędzy v_i i u_i, której wszystkie krawędzie należą do K, i która nie ma żadnych innych wierzchołków wspólnych ze ścieżkami z $\mathcal{R}$, otrzymalibyśmy $A - U$ ścieżkę $R' = R v_i L_i u_i$ taką, że rodzina $\mathcal{R} - R + R'$ miałaby mniej krawędzi poza K niż $\mathcal{R}$.

Stąd, $R = P_i$. Podobnie, oznaczając przez M_i U-ścieżkę łączącą u_i z t^i w K, a przez w_i wierzchołek M_i, najbliższy u_i, leżący na jakiejkolwiek ścieżce R z $\mathcal{R}$, wnioskujemy, że tą ścieżką jest Q_i. Zatem ścieżki $s_i P_i v_i L_i u_i M_i w_i Q_i t_i$, $i = 1, \ldots, k$, są rozłączne (rysunek!), co dowodzi, że G jest k-zwarty. ■

Z dowodów Lematu 4 i twierdzenia 13 wynika, że $h(r) \leq 2^{\binom{r}{2}}$, a $f(k) \leq 2^{\binom{3k}{2}} + 2k$. Thomas i Wollan w r. 2005 poprawili to oszacowanie do $f(k) \leq 16k$. (Przypomnijmy, że $d(G) \geq \kappa(G)$.)

Twierdzenie 14 (D 3.5.3, Thomas i Wollan 2005) *Jeśli G jest $2k$-spójny i $\epsilon(G) \geq 8k$, to G jest k-zwarty.* ■

Również oszacowanie z Lematu 4 można poprawić i to właśnie przy pomocy Twierdzenia 14: najmniejsza funkcja $h(r)$ jest rzędu r^2. Pokazali to, niezależnie, Bollobás, Thomason (1998) i Komlós, Szemerédi, (1996).

Twierdzenie 15 (D 7.2.1) *Istnieje c takie, że dla każdego r, jeśli $d(G) \geq cr^2$, to $G \supseteq TK_r$.*

W dowodzie, oprócz Twierdzenia 14 przydatny będzie następujący fakt.

Twierdzenie 16 (D 1.4.3, Mader 1972) *Każdy graf G o $d(G) \geq 4k$ ma $(k+1)$-spójny podgraf H o $\epsilon(H) > \epsilon(G) - k$.*

Dowód: Niech $\gamma := \epsilon(G) \geq 2k$ i rozważmy wszystkie podgrafy $G' \subseteq G$ takie, że

$$|G'| \geq 2k \qquad \text{i} \qquad ||G'|| > \gamma(|G| - k). \tag{2}$$

Ponieważ $d(G) \leq d(K_{|G|}) < |G|$, to G jest jednym z takich podgrafów. Niech H będzie takim podgrafem o najmniejszej liczbie $|H|$.

Zauważmy, że każdy graf G' spełniający (2) ma $|G'| > 2k$. Zatem, z minimalności H, mamy $\delta(H) > \gamma$, bo w przeciwnym razie H zawierałby podgraf właściwy spełniający (2). Stąd, $|H| \geq \gamma$ i dzieląc drugą nierówność w (2) dla H przez $|H|$ otrzymujemy, że $\epsilon(H) > \gamma - k$.

Pozostaje pokazać, że H jest $(k+1)$-spójny. Przypuśćmy nie wprost, że nie jest, to znaczy, że istnieje podział $V(H) = U_1 \cup U_2$, taki że nie ma krawędzi między $U_1 \setminus U_2$ a $U_2 \setminus U_1$, oba te zbiory są niepuste oraz $|U_1 \cap U_2| \leq k$. Niech $H_i = H[U_i]$, $i = 1, 2$. Ponieważ dla każdego $v \in U_1 \setminus U_2$ mamy $d_{H_i}(v) = d_H(v) \geq \delta(H) > \gamma \geq 2k$, to $|H_i| > 2k$. Zatem, z minimalności H, $||H_i|| \leq \gamma(|H_i| - k)$. Wtedy jednak

$$||H|| \leq ||H_1|| + ||H_2|| \leq \gamma(|H_1| + |H_2| - 2k) \leq \gamma(|H| - k)$$

– sprzeczność. ∎

Dowód Twierdzenia 15: Niech $d(G) \geq 10r^2$ i załóżmy, że r jest liczbą parzystą. Na podstawie Tw. 16 z $k = r^2$, G ma r^2-spójny podgraf H, gdzie $\epsilon(H) \geq 4r^2$. Na podstawie Tw. 14 z $k = r^2/2$, H jest r^2-zwarty. Ponieważ $\delta(H) \geq \kappa(H) \geq r^2$, można wybrać r wierzchołków $v_1, \ldots, v_r$ i dla każdego z v_i zbiór $r-1$ jego sąsiadów u_i^j, gdzie $1 \leq j \leq r$, $j \neq i$, tak, że wszystkie r^2 wierzchołki są różne. Teraz połączmy wierzchołki u_i^j w $\binom{r}{2}$ par postaci u_i^j, u_j^i oraz wierzchołki v_i w pary, i zastosujmy r^2-zwartość. Otrzymane rozłączne ścieżki pomiędzy wierzchołkami u_i^j tworzą wraz z wierzchołkami bazowymi v_i topologiczną klikę TK_r. (Gdy r jest nieparzyste, to wzmacniamy założenie na $d(G) \geq 10r^2 + 8$ tak, by H był $(r^2+1)/2$-zwarty. Nastepnie, wybieramy dodatkowo v_0 i dalej bez zmian.) ∎

Dla danym grafów X i G, piszemy $G = MX$, gdy $V(G) = \bigcup_{x \in V(X)} V_x$, V_x są parami rozłączne, dla każdego $x \in V(X)$ indukowany podgraf $G[V_x]$ jest spójny i dla każdej pary $x, y \in V(X)$ istnieje krawędź pomiędzy V_x i V_y wgdy $xy \in E(X)$. Innymi słowy, X powstaje z G przez ściągnięcie zbiorów V_x i usunięcie krawędzi równoległych. Jeśli $G = MX$ i $G \subseteq Y$, to X nazywamy minorem grafu Y. Dla zwykłych minorów MK_r próg na gęstość

$d(G)$ gwarantujący istnienie MK_r w G jest trochę niższy niż w przypadku klik topologicznych TK_r.

Twierdzenie 17 (D 7.2.2, Kostochka 1982,) *Istnieje c takie, że dla każdego r, jeśli $d(G) \geq cr\sqrt{\log r}$, to $G \supseteq MK_r$.*

9 Kryteria planarności

Graf planarny, to graf, który można narysować (umieścić, zanurzyć) na płaszczyźnie tak, by krawędzie nie przecinały się poza swoimi wierzchołkami. Należy odróżniać graf planarny (obiekt abstrakcyjny) od *grafu płaskiego* (konkretny rysunek grafu planarnego bez przecięć krawędzi).

9.1 Topologiczne kryterium planarności

Wiemy już, że ani K_5 ani $K_{3,3}$ nie jest planarny. Również żadna topologiczna klika TK_5 ani $TK_{3,3}$ nie jest planarna. Stąd żaden graf zawierający TK_5 lub $TK_{3,3}$ nie jest planarny. Kuratowski odwrócił tę implikację.

Twierdzenie 18 (Kuratowski 1930 D 4.4.6) *Graf jest planarny wgdy nie zawiera TK_5 ani $TK_{3,3}$.*

Najpierw pokażemy, że można się ograniczyć do zwykłych minorów. Dla danym grafów X i Y, piszemy $Y = MX$, gdy $V(Y) = \bigcup_{x \in V(X)} V_x$, V_x są parami rozłączne, dla każdego $x \in V(X)$ indukowany podgraf $Y[V_x]$ jest spójny i dla każdej pary $x, y \in V(X)$ istnieje krawędź pomiędzy V_x i V_y wgdy $xy \in E(X)$. Innymi słowy, X powstaje z Y przez ściągnięcie zbiorów V_x i usunięcie krawędzi równoległych. Jeśli $Y = MX$ i $Y \subseteq Y$, to X nazywamy minorem grafu Y. Obie relacje, bycia minorem i topologicznym minorem (zdefiniowana w rozdziale 8), są częściowymi porządkami.

Lemat 5 (D 4.4.2) *Graf zawiera K_5 lub $K_{3,3}$ jako minor wgdy zawiera K_5 lub $K_{3,3}$ jako topologiczny minor.*

Dowód: Łatwo pokazać, że każdy TX jest również MX oraz, że przy $\Delta(X) \leq 3$, każdy MX zawiera TX (ćwiczenia). Zatem wystarczy pokazać, że każdy graf G zawierający MK_5 zawiera TK_5 lub $MK_{3,3}$.

Niech K będzie minimalnym podgrafem G, takim że $K = MK_5$. Wtedy, każdy z 5 zbiorów podziału, V_i, $i = 1, \ldots, 5$, indukuje drzewo T_i, a pomiędzy każda parą tych zbiorów jest dokładnie 1 krawędź. Rozszerzmy drzewa T_i do drzew T_i' poprzez dodanie 4 krawędzi łączących je w K z innymi zbiorami podziału.

Z minimalnosci K, drzewa T_i' mają dokładnie 4 wierzchołki wiszące (te należące do innych zbiorów). Jeśli dla każdego i, $T_i' = TK_{1,4}$, to $K = TK_5$. Jeśli, np. T_1' nie jest $TK_{1,4}$, to ma dokładnie 2 wierzchołki stopnia

3, powiedzmy a i b. Wtedy, dzielimy $V_1 = A \cup B$, gdzie $a \in A$, $b \in B$, i ściągamy zbiory $A, B, V_2, ..., V_5$, otrzymując $K_{3,3}$. ■

Zatem Tw. Kuratowskiego jest równoważne następującemu.

Twierdzenie 19 (Wagner 1937 D 4.4.6) *Graf jest planarny wgdy nie zawiera MK_5 ani $MK_{3,3}$.*

Udowodnimy je najpierw dla grafów 3-spójnych.

Lemat 6 (D 4.4.3) *Każdy 3-spójny graf G bez MK_5 ani $MK_{3,3}$ jest planarny.*

Dowód: Indukcja względem $|G|$. Dla $|G| = 4$ jest to prawda ($G = K_4$). Niech $|G| > 4$ i założmy Lemat jest prawdziwy dla mniejszych grafów. Z Lematu 3, G ma krawędź xy taką, że $G|xy$ jest 3-spójny. Oczywiście, $G|xy$ też nie ma MK_5 ani $MK_{3,3}$ (z przechodniości), więc z założenia ind. jest planarny. Niech $\tilde{G}$ będzie grafem płaskim izomorficznym z $G|xy$ (rysunkiem $G|xy$).

Niech f będzie ścianą $\tilde{G} - v_{xy}$ zawierającą v_{xy}, a C jej brzegiem. Ponieważ $\tilde{G} - v_{xy}$ jest 2-spójny, to C jest cyklem (ćw.). Niech $X = N_G(x) - \{x\}$ i $Y = N_G(y) - \{y\}$. Mamy $X \cup Y \subseteq V(C)$. Usuwając z $\tilde{G}$ krawędzie łączące v_{xy} z $Y \setminus X$, otrzymujemy rysunek $G - y$, gdzie v_{xy} jest obrazem x. Teraz dorysujemy tam y wraz z przyległymi krawędziami.

Ponumerujmy wierzchołki z X kolejno wzdłuż cyklu C: $x_1, \ldots, x_k$. Dzielą one C na ścieżki P_i, $i = 1, \ldots, k$, o końcach w x_i i x_{i+1}, gdzie $x_{k+1} = x_1$. Pokażemy, że $Y \subseteq V(P_i)$ dla pewnego i. Jeśli nie, to albo istnieją 4 różne wierzchołki $x', x'' \in X$ i $y', y'' \in Y$, ułożone na cyklu w kolejności x', y', x'', y'', albo $|X \cap Y| \geq 3$. Dodając x i y, w pierwszym przypadku otrzymalibyśmy $TK_{3,3}$ w G, w drugim – TK_5. Tak czy siak, sprzeczność.

Niech więc $Y \subseteq V(P_i)$. Wtedy jednak możemy umieścić y we wnętrzu ściany $\tilde{G}$ otoczonej cyklem $x - x_i - P_i - x_{i+1} - x$, otrzymując płaski rysunek grafu G. ■

Do pełnego dowodu Tw. Kuratowskiego/Wagnera wystarczy teraz następujący lemat.

Lemat 7 (D 4.4.5) *Jeśli $|G| \geq 4$ i G jest krawędziowo maksymalnym grafem bez TK_5 i $TK_{3,3}$, to G jest 3-spójny.* ■

I na koniec ważny wniosek.

Wniosek 6 (D 4.4.7) *Każdy krawędziowo maksymalny graf planarny (triangulacja) o co najmniej 4 wierzchołkach jest 3-spójny.*

10 Kolorowanie z list

Kolorowanie z list jest uogólnienien zwykłego kolorowania. Dane są graf G i rodzina zbiorów (list) kolorów $(S_v)_{v\in V(G)}$. Kolorowanie właściwe

$$c : V(G) \to \bigcup S_v$$

nazywamy *kolorowaniem z list* (S_v), gdy $c(v) \in S_v$ dla każdego $v \in V(G)$. Graf G jest *k-wybieralny*, gdy dla każdej rodziny list (S_v) takiej, że $|S_v| = k$, $v \in V(G)$, G jest kolorowalny z tych list. Najmniejsze k takie, że G jest k-wybieralny nazywamy *liczbą wyboru grafu G* i oznaczamy przez $ch(G)$. W przypadku kolorowania krawędzi, analogicznie definiuje się indeks wyboru $ch'(G)$.

Jeśli ograniczymy się do rodzin identycznych list $S_v = \{1, \ldots, k\}$, to otrzymujemy definicję zwykłej liczby chromatycznej $\chi(G)$ i indeksu chromatycznego $\chi'(G)$. Zatem

$$ch(G) \geq \chi(G) \quad \text{oraz} \quad ch'(G) \geq \chi'(G).$$

Istnieją grafy 2-dzielne (o liczbie chromatycznej 2), których liczba wyboru wynosi n (ćw.). Natomiast nie wiadomo czy istnieje graf G, dla którego $ch'(G) > \chi'(G)$.

Hipoteza 2 *Dla każdego grafu G, $ch'(G) = \chi'(G)$.*

Wracając do kolorowania wierzchołków, Voigt skonstruował w 1993 roku graf planarny na 238 wierzchołkach, który nie jest 4-wybieralny. (Słuchacze wykładów w sezonie 2000 znaleźli taki graf na 86 wierzchołkach.) Rok pózniej Thomassen pokazał, że, w przypadku grafów planarnych, listy długości 5 zawsze wystarczą, dostarczając tym samym nowego dowodu Twierdzenia o 5 kolorach (D 5.1.2).

Twierdzenie 20 (Thomassen 1994, D 5.4.2) *Każdy graf planarny jest 5-wybieralny.*

Dowód: Udowodnimy, przez indukcję względem $|G|$, fakt trochę mocniejszy.

Mocniejszy Fakt: *Niech ściana zewnętrzna płaskiego grafu G jest otoczona cyklem $C = \{v_1, \ldots, v_k\}$ a wszystkie ściany wewnętrzne są trójkątami. Niech, ponadto, $S_{v_1} = \{1\}$, $S_{v_2} = \{2\}$, $|S_v| \geq 3$ dla wszystkich pozostałych* *wierzchołków cyklu C, a $|S_v| \geq 5$ dla wszystkich wierzchołków wewnętrznych. Wtedy G ma kolorowanie z list (S_v).*

MF natychmiast implikuje Twierdzenie. Rzeczywiście, możemy założyć, że G jest maksymalnie płaski, a więc jest triangulacją. Niech v_1, v_2, v_3 będą wierzchołkami ściany zewnętrznej. Pomalujmy v_1 i v_2 dowolnie dwoma różnymi kolorami z ich list. Na podstawie **MF** można to kolorowanie dokończyć.

MF dowodzimy przez indukcję. Dla $|G| = 3$ jest to fakt oczywisty. Załóżmy, że $|G| \geq 4$ i że **MF** zachodzi dla wszystkich grafów płaskich mniejszych niż G.

Przypadek I. C ma przekątną vw. Ta przekątna dzieli C na dwa mniejsze cykle C_1 i C_2. Przyjmijmy, że $v_1, v_2 \in C_1$. Niech G_1 i G_2 będą grafami otoczonymi, odpowiednio, cyklami C_1 i C_2. Stosujemy założenie indukcyjne najpierw do G_1, a następnie z v i w w roli v_1 i v_2, do G_2.

Przypadek II. C nie ma przekątnej. Niech $u_1, \ldots, u_m$ będą różnymi od v_1 i v_{k-1} sąsiadami v_k w G. Ponieważ nie ma przekątnych, to $m \geq 1$, a ponieważ wewnątrz jest triangulacja, to ścieżka $v_{k-1}, u_m, \ldots, u_1, v_1$ jest fragmentem ściany zewnętrznej grafu $G - v_k$. Niech $l, j \in S_{v_k} - \{1\}$, $j \neq l$. Usuńmy kolory j i l ze wszystkich list S_{u_j}, $j = 1, \ldots, m$, i zastosujmy **MF** do $G - v_k$. Jeden z kolorów j lub l pozostanie na pewno wolny dla v_k. ∎

Teraz naszym celem będzie udowodnienie Hipotezy 2 dla grafów dwudzielnych. Do tego będzie nam potrzebne pojęcie jądra grafu skierowanego D. Zbiór niezależny $U \subseteq V(D)$ nazywamy jądrem digrafu D, gdy dla każdego $v \in V(D) \setminus U$ istnieje $u \in U$ taki, że $vu \in E(D)$.

Lemat 8 (D 5.4.3) *Niech dane będą graf H i listy kolorów $(S_v)_{v \in V(H)}$. Jeśli istnieje orientacja D grafu H taka, że dla każdego $v \in V(H)$ mamy $d^+(v) < |S_v|$, oraz każdy indukowany podgraf D' grafu D ma jądro, to H może być pomalowany z list $(S_v)_{v \in V(H)}$.*

Uwaga. Ten lemat ma swoje korzenie (przynajmniej intuicyjnie) w zachłannym algorytmie kolorowania, który działa następująco. Uporządkujmy wierzchołki liniowo $v_1, \ldots, v_n$ tak by każdy v_i miał mniej niż $|S_{v_i}|$ sąsiadów pośród $v_1, \ldots, v_{i-1}$; jeśli to możliwe, to oczywiście można pomalować wierzchołki kolejno, używając zawsze kolorów z ich list. Zauważmy, że orientując krawędzie od v_i do v_j gdy $i > j$, otrzymujemy orientację spełniającą warunek $d^+(v) < |S_v|$; co więcej, pierwszy kolor indukuje jądro, a każdy następny też jest jądrem w podgrafie otrzymanym po usunięciu wierzchołków uprzednio pomalowanych.

Dowód: Indukcja względem $|H|$. Dla $|H| = 1$, warunek $d^+(v) < |S_v|$ implikuje, że S_v nie jest pusta, a więc można pomalować jedyny wierzchołek grafu H. Niech teraz $|H| > 1$ i załóżmy prawdziwość lematu dla wszystkich grafów o mniej niż $|H|$ wierchołkach.

Niech α będzie dowolnym kolorem występującym w $\bigcup S_v$, i niech D będzie taką orientacją H jak w założeniach lematu. Niech $V_\alpha = \{v : \alpha \in S_v\}$ i $D_\alpha = D[V_\alpha]$. Podgraf D_α ma jądro U_α.

Pomalujmy U_α kolorem α i usuńmy α ze wszystkich list. Digraf $D - U_\alpha$ nadal będzie spełniać warunek $d^+(v) < |S_v|$, bo jeśli prawa strona zmalała o 1, to $v \in D_\alpha$, a zatem i lewa strona zmalała o 1, bo odpadł sąsiad z jądra. Zatem $H - U_\alpha$ spełnia założenia lematu i na podstawie założenia indukcyjnego można go pomalować z list bez koloru α, co w efekcie daje kolorowanie całego H z wyjściowych list. ■

Twierdzenie 21 (Galvin, 1995, D 5.4.4) *Dla każdego dwudzielnego grafu G*

$$ch'(G) = \chi'(G) \quad (= \Delta G)).$$

Uwaga. Jest to uogólnione rozwiązanie problemu istnienia częściowego kwadratu łacińskiego, czyli pytania czy $ch'(K_{n,n}) = n$. Przeczytaj artykuł "Quite easily doneńa ten temat.

Dowód: Niech G będzie grafem dwudzielnym o dwupodziale (X, Y). Oznaczmy przez k jego indeks chromatyczny i niech $c : E(G) \to \{1, \ldots, k\}$ będzie właściwym kolorowaniem krawędzi. Ponieważ zawsze

$$ch'(G) \geq \chi'(G) = k,$$

więc pokażemy, że $ch'(G) \leq k$. Skorzystamy przy tym z tożsamości $ch'(G) = ch(L(G))$, gdzie $L(G)$ jest grafem krawędziowym grafu G.

Oznaczmy dla wygody $H = L(G)$ i wprowadźmy orientację krawędzi H. Dla $ee' \in E(H)$ ustalamy $ee' \in E(D)$, gdy $e \cap e' \in X$ i $c(e) > c(e')$ lub $e \cap e' \in Y$ i $c(e) < c(e')$. Łatwo się przekonać, że $d^+(e) < k$ (jeśli $c(e) = i$, to e może wypuszczać strzałkę do co najwyżej $i - 1$ krawędzi e', z którymi spotyka się w X i nie więcej niż do $k - i$ krawędzi e' z którymi spotyka się w Y).

Zatem pozostaje pokazać, że każdy indukowany podgraf D' ma jądro. Zastosujemy indukcję względem $|D'|$. Niech $E' = V(D') \subseteq E(G)$. Dla każdego $x \in X$ incydentnego z przynajmniej jedną krawędzią ze zbioru E'

wybieramy spośród nich krawędź o najmniejszej wartości $c(e)$ i oznaczamy ją przez e_x.

Twierdzimy, że zbiór U wszystkich krawędzi e_x jest jądrem podgrafu D'. Jedno jest pewne: dla każdej $e' \in E' \setminus U$ mamy $e'e \in D$. Trzeba więc tylko pokazać, że U jest zbiorem niezależnym. Przypuśćmy nie wprost, że $e, e' \in U$ i $ee' \in D'$. Powiedzmy, że $c(e) < c(e')$. Zatem z definicji orientacji D, e i e' spotykają się w Y.

Z założenia indukcyjnego $D' - e$ ma jądro U'. Jeśli $e' \in U'$, to U' jest też jądrem D'. Jeśli $e' \notin U'$, to z definicji jądra istnieje $e'' \in U'$ takie, że $e'e'' \in D'$. Zastanówmy się, gdzie mogą spotykać się e' i e''. Gdyby w X, to $c(e'') < c(e')$ – sprzeczność z zaliczeniem e' do U. Zatem w Y, co znaczy, że $c(e') < c(e'')$, a więc i $c(e) < c(e'')$, czyli, że $ee'' \in D'$. Oznacza to jednak, że i tym razem U' jest jądrem całego D'. $\blacksquare$

11 Grafy doskonałe

Graf G jest *doskonały*, gdy dla każdego indukowanego podgrafu $H \subseteq G$, mamy $\chi(G) = \omega(G)$, gdzie $\omega(G)$ jest liczbą klikową grafu G, tj. liczbą wierzchołków w największym podgrafie pełnym grafu G. W grafie doskonałym, żeby stwierdzić czy $\chi(G) < k$ wystarczy przejrzeć wszystkie podzbiory wierzchołków mocy k (a jest ich mniej niż n^k); jeśli żaden z nich nie indukuje podgrafu pełnego, to odpowiedź jest pozytywna; w przeciwnym razie, oczywiście, negatywna.

Wiele ważnych w zastosowaniach klas grafów jest doskonałych. Przede wszystkim, trywialnie, grafy dwudzielne, a także, jako wniosek z Twierdzenia Königa, ich dopełnienia. Również grafy porównań i grafy przedziałowe, oraz ich dopełnienia.

Teraz, na zasadzie przykładu, zajmiemy się inną, specjalną klasą grafów. *Grafem przekątniowym* nazywamy graf, w którym żaden cykl o długości większej niż trzy nie jest indukowany. Innymi słowy, każdy cykl oprócz trójkątów posiada przekątną. Naszym celem jest pokazanie, że grafy przekątniowe są doskonałe. Najpierw przyjrzymy się ich strukturze. Mówimy, że G jest wynikiem *sklejenia* G_1 i G_2 wzdłuż S, jeśli $G = G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2 = S$ oraz G_1, G_2, S są indukowanymi podgrafami grafu G, Poniższa własność podaje rekursywną, konstrukcyjną definicję grafu przekątniowego.

Fakt 7 (D 5.5.1) *G jest przekątniowy wgdy jest wynikiem ciągu sklejeń grafów przekątniowych wzdłuż podgrafów pełnych, zaczynając od grafów pełnych.*

Dowód: W jedną stronę jest to trywialne. Każdy indukowany cykl w G musi zawierać się w całości w G_1 lub w G_2, a więc musi być trójkątem.

W drugą stronę, zastosujemy indukcję względem $|G|$. Jeśli G jest pełny, to można przyjąć $G_1 = G_2 = S = G$. Jeśli G nie jest spójny, to można przyjąć $S = \emptyset$. Załóżmy więc, że G nie jest pełny i jest spójny. Niech $a, b \in V(G)$, $ab \notin E(G)$. Niech, ponadto, X będzie minimalnym zbiorem rozdzielającym a i b, $X \subseteq V(G) \setminus \{a, b\}$. Niech C_a będzie składową grafu $G - X$ zawierającą a, C_b analogicznie. Niech $G_1 = G[V(C_a) \cup X]$, $G_2 = G - V(C_a)$. Tak więc G jest sklejeniem G_1 i G_2 wzdłuż $S = G[X]$. Grafy G_1 i G_2 jako indukowane podgrafy G są przękątniowe i mają mniej wierzchołków niż G. Zatem na podstawie założenia indukcyjnego oba są wynikiem sklejania określonego w tekscie Factu 7. Pozostaje pokazać, że S jest podgrafem pełnym.

Niech $s, t \in X$. Z minimalności X wynika, że zarówno s jak i t mają sąsiadów w każdej składowej $G - X$. Zatem G_i ma X-ścieżkę z s do t,

$i = 1, 2$. Niech P_i będzie nakrótszą taką ścieżką, $i = 1, 2$. Wtedy $P_1 \cup P_2$ jest cyklem w G, który powinien mieć przekątną. Ale żadna para wierzchołków tego cyklu poza st nie może być połączona krawędzią. Zatem $st \in E(G)$. ■

Fakt 8 (D 5.5.2) *Każdy graf przekątniowy jest doskonały.*

Dowód: Grafy pełne są doskonałe. Zatem w świetle Faktu 7 wystarczy pokazać, że graf G otrzymany w wyniku sklejenia dwóch grafów doskonałych wzdłuż podgrafu pełnego S jest doskonały. Niech H będzie indukowanym podgafem grafu G. Pokażemy że $\chi(H) \leq \omega(H)$. Niech $H_i = H \cap G_i$ oraz $T = H \cap S$. Z doskonałości G_i wynika, że $\chi(H_i) \leq \omega(H_i)$, $i = 1, 2$. Zauważmy, że $\omega(H) \geq \max_i \omega(H_i)$, ale, z drugiej strony, $\chi(H) = \max_i \chi(H_i)$. Ta ostatnia równość wynika stąd, że po odpowiedniej permutacji kolorów grafu H_2, można tak pokolorować osobno H_1 i H_2, że kolory na wspólnej części S zgadzają się (jest to możliwe dzięki temu, że S jest grafem pełnym i wszystkie kolory na S są różne). ■

Oznaczmy przez $\bar{G}$ dopełnienie grafu G.

Twierdzenie 22 (D 5.5.3, Lovász, 1972) *G jest doskonały wgdy $\bar{G}$ jest doskonały.*

Mówimy że graf G' jest wynikiem *sklonowania* wierzchołka x w grafie G, gdy G' powstaje z G przez dodanie nowego wierzchołka x' oraz połączenie go z x oraz ze wszystkimi sąsiadami x w G.

Fakt 9 (D 5.5.4) *Graf G' będący wynikiem sklonowania wierzchołka grafu doskonałego jest doskonały.*

Dowód: Indukcja względem $|G|$. Jest to prawdą dla $G = K_1$. Niech $G \neq K_1$. Wystarczy pokazać, że $\chi(G') \leq \omega(G')$. Nie musimy się troszczyć o właściwe podgrafy indukowane grafu G', bo każdy z nich jest albo podgrafem indukowanym grafu G (gdy nie zawiera jednocześnie obu wierzchołków x i x') albo jest wynikiem sklonowania wierzchołka x w podgrafie grafu G. W pierwszym przypadku korzystamy z doskonałości G, w drugim – z założenia indukcyjnego.

Oznaczmy $\omega = \omega(G)$. Wtedy $\omega(G') \in \{\omega, \omega + 1\}$. Ponieważ

$$\chi(G') \leq \chi(G) + 1 = \omega + 1,$$

to wystarczy rozpatrzyć przypadek $\omega(G') = \omega$. Oznacza to, że x nie należy do żadnej kliki K_ω w G. Pomalujmy G przy pomocy optymalnej liczy kolorów ω. Niech X będzie zbiorem wszystkich wierzchołków o tym samym kolorze co x. Wtedy zbiór $X - x$ przecina wszystkie kliki K_ω w G. Zatem graf $H = G-(X-x)$ ma $\omega(H) \leq \omega-1$ i z doskonałości G, również $\chi(H) \leq \omega-1$. Ale zbiór $V(G'-H) = X-x+x'$ jest niezależny, więc $\chi(G') \leq \chi(H)+1 \leq \omega$. ■

Dowód Twierdzenia 22: Indukcja względem $|G|$. Załóżmy, że G jest doskonały i $|G| \geq 2$. Niech $\mathcal{K}$ będzie rodziną wszystkich podgrafów pełnych w grafie G (dokładniej, ich zbiorów wierzchołków). Niech, ponadto, $\alpha = \alpha(G)$, a $\mathcal{A}$ będzie rodziną wszystkich zbiorów niezależnych mocy α w G. Wystarczy pokazać, że $\chi(\bar{G}) \leq \omega(\bar{G})$ (dla właściwych podgrafów indukowanych wynika to z założenia indukcyjnego). Naszym celem jest znalezienie $K \in \mathcal{K}$ takiego, że $K \cap A \neq \emptyset$ dla każdego $A \in \mathcal{A}$. Wtedy bowiem

$$\chi(\bar{G}) \leq \chi(\bar{G} - K) + 1 = \omega(\bar{G} - K) + 1 = \alpha(G - K) + 1 \leq \alpha = \omega(\bar{G}).$$

Przypuśćmy nie wprost, że dla każdego $K \in \mathcal{K}$ istnieje $A = A_K \in \mathcal{A}$ takie, że $K \cap A_K = \emptyset$.

Zbudujmy nowy graf G' zastępując każdy wierzchołek x podgrafem pełnym $G_x = K_{k(x)}$, gdzie $k(x) = |\{K \in \mathcal{K} : x \in A_K\}|$, a każdą krawędź pomiędzy wierzchołkami x i y, podgrafem pełnym dwudzielnym $K_{k(x),k(y)}$.

Mamy $\alpha(G') \leq \alpha$. Zauważmy też, że G' jest wynikiem ciągu sklonowań wierzchołków, zaczynając od grafu $G[\{x \in V(G) : k(x) > 0\}]$, który, jako indukowany podgraf G jest doskonały. Zatem G', na podstawie Faktu 9, też powinien być doskonały. Tu jednak, poprzez dokładne szacowanie $\omega(G')$ i $\chi(G')$, otrzymamy sprzeczność.

Niech X' będzie kliką w G'. Wtedy, dla pewnego podgrafu pełnego $X \in \mathcal{K}$, $X' = G'[\bigcup_{x \in X} G_x]$. Stąd,

$$\omega(G') = \sum_{x \in X} k(x) \leq |\mathcal{K}| - 1,$$

ponieważ każda klika $K \in \mathcal{K}$ jest liczone w powyższej sumie co najwyżej raz, a X nie jest liczone wcale. Jest tak dlatego, że $|X \cap A_K| \leq 1$ oraz $|X \cap A_X| = 0$. Z drugiej strony,

$$|G'| = \sum_{x \in V(G)} k(x) = |\mathcal{K}|\alpha \geq |\mathcal{K}|\alpha(G')$$

i

$$\chi(G') \geq \frac{|G'|}{\alpha(G')} \geq |\mathcal{K}| > \omega(\mathcal{G}').$$

■

Poniższe twierdzenie łatwo implikuje Twierdzenie 22

Twierdzenie 23 (D 5.5.5, Lovász, 1972) *G jest doskonały wgdy*

$$|H| \leq \alpha(H)\omega(H)$$

dla każdego indukowanego podgrafu $H \subseteq G$.

Hipoteza 3 (Hipoteza o grafach doskonałych, Berge, 1966) *Graf G jest doskonały wgdy ani G ani G^c nie zawiera indukowanego cyklu o nieparzystej długości większej niż 3.*

To jest tzw. silna hipoteza Berge'a. Słabą nazywano Twiedzenie 22 zanim zostało udowodnione. Grafy, o których mowa w hipotezie Berge'a noszą nazwę grafów Berge'a. Wszystkie grafy doskonałe są grafami Berge'a, a hipoteza głosi, że jest też na odwrót. Niedawno, Chudnovski, Robertson, Seymour i Thomas udowodnili Hipotezę 3. Ich dowód liczy około 200 stron!

Hipoteza Hadwigera. Ponieważ $\chi(G) \leq \max_{H \subseteq G} \delta(H) + 1$, duża liczba chromatyczna wymusza podgraf o dużym minimalnym, a więc i średnim stopniu. Zatem w powyższych twierdzeniach 15 i 17 można zastąpić $d(G)$ przez $\chi(G)$. Hipoteza Hadwigera (1943) mówi, że już warunek $\chi(G) \geq r$ wymusza istnienie w G minora MK_r. Mocniejsza hipoteza Hajosa (1961), głosząca, że ten sam warunek wymusza topologiczny minor TK_r została zdruzgotana w 1979 roku za sprawą Catlina, Erdősa i Fajtlowicza, o czym można się więcej dowiedzieć z książeczki „Niekonstruktywne..."(Palka, Ruciński, 1996).

Hipoteza Hadwigera jest trywialna dla $r \leq 3$, łatwa dla $r = 4$, potwierdzona dla $r = 5$ i $r = 6$. Z jej prawdziwości dla $r = 5$ wynika natychmiast Hipoteza 4 Kolorów.

12 Lemat Szemerédiego

Zacznijmy od zdefiniowania *gęstości* i *ϵ-regularności* pary rozłącznych podzbiorów X i Y wierzchołków grafu G, oraz *podziału ϵ-regularnego.*

Gęstością pary (X, Y) w grafie G, gdzie $X, Y \subseteq VG)$ i $X \cap Y = \emptyset$, nazywamy liczbę $d_G(X,Y) = \frac{e_G(X,Y)}{|X||Y|}$. Dla ustalonego $\epsilon > 0$, parę (X, Y) nazywamy ϵ-regularną, gdy dla wszystkich par (X', Y'), gdzie $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$, $|X'| \geq \epsilon|X|$, $|Y'| \geq \epsilon|Y|$, zachodzi nierówność

$$|d_G(X', Y') - d_G(X, Y)| \leq \epsilon.$$

Para ϵ-regularna przypomina dwudzielny graf losowy, gdzie krawędzie pojawiają się niezależnie z prawdopodobieństwem d, $0 < d < 1$. W takim grafie, z prawdopodobieństwem bardzo bliskim 1, wszystkie dostatecznie duże pary bedą miały gęstość zbliżoną do d. Stąd częto pary ϵ-regularne nazywa się pseudolosowymi.

Podział $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_k$ nazywamy ϵ-regularnym, gdy $|V_0| \leq \epsilon|G|$, $|V_1| = \cdots = |V_k|$, i, co najważniejsze, liczba tych par spośród (V_i, V_j), $1 \leq i < j \leq k$, które nie są ϵ-regularne, wynosi nie więcej niż ϵk^2. Zbiór V_0 pełni w tej definicji rolę pomocniczą i jest czasem nazywany śmietnikiem.

Lemat 9 (o regularności grafów, Szemerédi, 1978, D 7.4.1) *Dla każdego $\epsilon > 0$ i naturalnego m, istnieje liczba M taka, że każdy graf o co najmniej m wierzchołkach posiada podział ϵ-regularny $(V_0, V_1, ..., V_k)$ dla pewnego $m \leq k \leq M$.*

Warunek $k \leq M$ gwarantuje, że zbiory V_i, $i = 1, \ldots, k$, są duże, bo $|V_i| \geq (1 - \epsilon)|G|/M$. Warunek $k \geq m$ pozwala oszacować z góry liczbę krawędzi wewnątrz zbiorów V_i, bo $\sum_{i=1}^{k} e(V_i) < k\frac{|G|^2}{2k^2} \leq \frac{|G|^2}{2m}$. Tak więc, lemat ten mówi, że większość krawędzi każdego dużego grafu można rozbić na niewielką liczbę pseudolosowych podgrafów dwudzielnych.

Idea dowodu: Wprowadza się indeks podziału $q(\mathcal{P})$, który jest ograniczony z góry przez $1/2$. Ponadto indeks podpodziału nie może być mniejszy od indeksu wyjściowego podziału. Główny krok polega na pokazaniu, że jeśli dany podział $(V_0, V_1, ..., V_k)$ nie jest ϵ-regularny, to można znaleźć jego podpodział na co najwyżej $k4^k$ części, którego indeks jest większy o co najmniej $\epsilon^5/2$. Powtarzając tę operację nie więcej niż $1/\epsilon^5$ razy musimy więc w końcu otrzymać podział ϵ-regularny (bo w przeciwnym razie indeks przekroczyłby $1/2$, co jest niemożliwe).

Dowód: Oznaczmy $n = |G|$. Dla pary rozłącznych podzbiorów $A, B \subseteq V(G)$ zdefiniujmy $q(A,B) = \frac{|A||B|}{n^2} d^2(A,B)$. Dalej, dla podziału $\mathcal{A}$ zbioru A i podziału $\mathcal{B}$ zbioru B, niech $q(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \sum_{A' \in \mathcal{A}, B' \in \mathcal{B}} q(A', B')$. W końcu, dla podziału $\mathcal{P} = (C_1, \ldots, C_k)$ zbioru $V(G)$,

$$q(\mathcal{P}) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} q(C_i, C_j).$$

Zauważmy, że jeśli $|C_i| \leq n/k$, to $q(\mathcal{P}) \leq \binom{k}{2} k^{-2} < 1/2$.

Lemat 10 (D 7.4.2) *(i) $q(\mathcal{A},\mathcal{B}) \geq q(A,B)$*
(ii) Jeśli $\mathcal{P}'$ jest podpodziałem $\mathcal{P}$, to $q(\mathcal{P}') \geq q(\mathcal{P})$.

Dowód: (i) Na podstawie nierówności Cauchy-Schwarza,

$$q(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} \frac{e^2(A_i, B_j)}{|A_i||B_j|} \geq \frac{1}{n^2} \frac{(\sum_{i,j} e(A_i, B_j))^2}{\sum_{i,j} |A_i||B_j|} = \frac{1}{n^2} \frac{e^2(A,B)}{|A||B|} = q(A,B).$$

(ii) Niech $\mathcal{P} = (C_1, \ldots, C_k)$ i $\mathcal{C}_i = \mathcal{P}'[C_i]$. Na podstawie (i),

$$q(\mathcal{P}) = \sum_{i,j} q(C_i, C_j) \leq \sum_{i,j} q(\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j) \leq \sum_{i,j} q(\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j) + \sum_i q(\mathcal{C}_i) = q(\mathcal{P}'). \blacksquare$$

Poprzedni lemat mówił, że drobiąc podział nie można zmniejszyć indeksu q. Następny lemat pokazuje, że dzieląc w odpowiedni sposób parę nieregularną wartość indeksu rośnie.

Lemat 11 (D 7.4.3) *Jeśli para (C,D) nie jest ϵ-regularna, to istnieją podpodziały $\mathcal{C} = (C_1, C_2)$ zbioru C i $\mathcal{D} = (D_1, D_2)$ zbioru D takie, że*

$$q(\mathcal{C},\mathcal{D}) \geq q(C,D) + \epsilon^4 \frac{|C||D|}{n^2}.$$

Dowód: Niech $C_1 \subseteq C$, $D_1 \subseteq D$, $|C_1| \geq \epsilon|C|$, $|D_1| \geq \epsilon|D|$, $\eta = d(C_1, D_1) - d(C,D)$ i $|\eta| > \epsilon$. To znaczy, para (C_1, D_1) świadczy o ϵ-nieregularności pary (C,D). Oznaczmy $c = |C|$, $d = |D|$, $e = e(C,D)$, $C_2 = C \setminus C_1$, $D_2 = D \setminus D_1$, $c_i = |C_i|$, $d_i = |D_i|$, $e_{ij} = e(C_i, D_j)$, $i,j = 1,2$. Wtedy, na podstawie nierówności C-S, tym razem dla sumy trzech składników,

$$n^2 q(\mathcal{C},\mathcal{D}) = \frac{e_{11}^2}{c_1 d_1} + \sum_{i+j>2} \frac{e_{ij}^2}{c_i d_j} \geq \frac{e_{11}^2}{c_1 d_1} + \frac{(e - e_{11})^2}{(cd - c_1 d_1)}.$$

Po podstawieniu $e_{11} = \frac{c_1 d_1 e}{cd} + \eta c_1 d_1$ i podniesieniu do kwadratu, prawa strona staje się sumą sześciu wyrazów, z których dwa się wzajemnie redukują, jeden (dodatni) odrzucamy, i otrzymujemy w końcu oszacowanie

$$n^2 q(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \geq \frac{e^2}{cd} + \eta^2 c_1 d_1 > \frac{e^2}{cd} + \epsilon^4 cd = n^2 q(C, D) + \epsilon^4 |C||D|. \blacksquare$$

Ostatni z serii lematów pokazuje jak, w przypadku podziału nieregularnego, zsumować przyrosty indeksu, wynikające z Lematu 11, po wszystkich parach nieregularnych.

Uwaga. Przy obliczaniu indeksu podziału ze śmietnikiem C_0, z przyczyn technicznych każdy element śmietnika traktujemy jak osobny (jednoelementowy) zbiór podziału.

Lemat 12 (D 7.4.4) *Niech $0 < \epsilon \leq 1/4$ i niech $\mathcal{P} = (C_0, \ldots, C_k)$ będzie podziałem $V(G)$, który nie jest ϵ-regularny. Wtedy istnieje liczba naturalna l, $k \leq l \leq k4^k$ oraz podpodział $\mathcal{P}' = (C_0', \ldots, C_l')$ podziału $\mathcal{P}$ taki, że $|C_0'| \leq |C_0| + n2^{-k}$, $|C_1'| = \cdots = |C_l'|$ oraz $q(\mathcal{P}') \geq g(\mathcal{P}) + \epsilon^5/2$.*

Dowód: Dla przejrzystości rozumowania, przyjmijmy naiwnie, że $C_0 = \emptyset$, i że w trakcie dowodu wszystkie dzielenia liczb naturalnych wychodzą bez reszty. Oznaczmy $c = |C_i| = n/k$, $i = 1, \ldots, k$. Dla każdej pary (C_i, C_j), która nie jest ϵ-regularna, niech $\mathcal{C}_{ij}$ będzie podziałem C_i a $\mathcal{C}_{ji}$ – podziałem C_j, których istnienie gwarantuje Lemat 11. Wtedy $q(\mathcal{C}_{ij}, \mathcal{C}_{ji}) \geq q(C_i, C_j) + \epsilon^4 c^2/n^2$. Dla pozostałych par przyjmijmy $\mathcal{C}_{ij} = \{C_i\}$ i $\mathcal{C}_{ji} = \{C_j\}$. Dla ustalonego i, podziały $\mathcal{C}_{ij}$, $j \neq i$, „szatkująźbiór C_i na co najwyżej 2^{k-1} rozłącznych części. Niech $\mathcal{C}_i$ będzie tym podziałem zbioru C_i, tzn. $\mathcal{C}_i$ jest minimalnym (w sensie liczby klas) podziałem zbioru C_i, który jest podpodziałem każdego podziału $\mathcal{C}_{ij}$, $j \neq i$. Niech $\mathcal{C}$ będzie sumą wszystkich podziałów $\mathcal{C}_i$, tj. $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{C}_i$. Zauważmy, że $k \leq |\mathcal{C}| \leq k2^{k-1} < k2^k$.

Pokażemy teraz, że $q(\mathcal{C}) \geq q(\mathcal{P}) + \epsilon^5/2$. (Podział $\mathcal{C}$ nie jest obiecanym podziałem, bo jego klasy nie są równe; w końcowej części dowodu osiągniemy równość klasową drobiąc go na małe kawałeczki, co na podstawie Lematu 10(ii) nie obniży wartości indeksu.) Na podstawie Lematów 10 i 11 mamy

$$q(\mathcal{C}) \geq \sum_{1 \leq i < j} q(\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j) \geq \sum_{1 \leq i < j} q(\mathcal{C}_{ij}, \mathcal{C}_{ji}) \geq \sum_{1 \leq i < j} q(C_i, C_j) + \epsilon k^2 \frac{\epsilon^4 c^2}{n^2} = q(\mathcal{P}) + \epsilon^5.$$

W rzeczywistości, uwzględniając śmietnik, otrzymujemy tylko $\epsilon^5/2$ (bo wtedy $c \geq (n - \epsilon n)/k \geq \frac{3}{4}(n/k)$).

Teraz rozdrobnimy podział $\mathcal{C}$, dzieląc każdy jego zbiór na podzbiory mocy $\lfloor c4^{-k} \rfloor$. Nowy podział $\mathcal{P}'$ ma $l \leq k4^k$ podzbiorów (dlaczego?). Powracając do realiów, może się zdarzyć, że nie wszystkie klasy podziału $\mathcal{C}$ mają moc podzielną przez d. Wtedy reszty dorzucamy do śmietnika, który jednak nie wzrośnie o więcej niż $\lfloor c4^{-k} \rfloor |\mathcal{C}| \leq c4^{-k}k2^k \leq n2^{-k}$. ■

Końcówka dowodu: Niech dane będą $0 < \epsilon < 1/4$ i $m \geq 1$. Oznaczmy przez $s = \epsilon^{-5}$ maksymalną liczbę iteracji głównego kroku dowodu – znajdowania podpodziału aktualnego podziału. Niech k będzie najmniejszą liczbą naturalną taką, że $k \geq m$ oaz $2^{k-1} \geq s/\epsilon$ i $M = \max\{f^{(s)}(k), 2k/\epsilon\}$, gdzie $f(x) = x4^x$. Na przykład,

$$f^{(2)}(x) = x4^x 4^{x4^x}, \qquad f^{(3)}(x) = x4^{x+x4^x+x4^{x+x4^x}}, \qquad \ldots.$$

Udowodnimy lemat z tym właśnie monstrualnym M.

Niech G będzie dowolnym grafem o $n \geq m$ wierzchołkach. Dla $n \leq M$ konkluzja jest trywialna. Załóżmy więc, że $n > M$ i podzielny dowolnie $V(G) = C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_k$ tak, by $|C_1| = \cdots = |C_k|$ a $|C_0| < k$. Przypuśćmy, że ten podział nie jest ϵ-regualrny. Ponieważ $k \leq \epsilon M/2 < \epsilon n/2$, to możemy stosować Lemat 12 otrzymując nowy, drobniejszy podział o większym indeksie i śmietniku. Powtarzamy ten krok aż do skutku. Jednak nawet po s iteracjach, wielkość śmietnika nie przekroczy liczby $k + sn2^{-k} \leq \epsilon n/2 + \epsilon n/2 = \epsilon n$. Ostateczny, ϵ-regularny podział będzie mieć co najwyżej $f^{(s)}(k) \leq M$ części. ■

13 Zastosowania Lematu Szemerédiego

13.1 Twierdzenie Erdősa-Stone'a (Rozdziały 7.1 i 7.5 podręcznika)

Jednym z głównych zagadnień ekstremalnej teorii grafów jest wyznaczenie parametru

$$ex(n, H) = \max\{||G|| : |G| = n \text{ i } G \not\supseteq H\},$$

będącego maksymalną liczbą krawędzi w n-wierzchołkowym grafie G nie zawierającym żadnej kopii danego grafu H.

Graf Turána $T^{r-1}(n)$ to graf $(r-1)$-dzielny o $n \geq r-1$ wierzchołkach i maksymalnej liczbie krawędzie (oznaczanej $t_{r-1}(n)$). Moce jego klas podziału różnią się o co najwyżej 1.

Twierdzenie 24 (D 7.1.1, Turán, 1941) *Dla wszystkich liczb naturalnych r i n, $r > 1$, każdy graf bez K^r o n wierzchołkach i $ex(n, K^r)$ krawędziach jest (izomorficzny z) grafem Turána.*

Twierdzenie 25 (D 7.1.2, Erdős, Stone, 1946) *Dla wszystkich liczb naturalnych $r \geq 2$ i $s \geq 1$, i dla każdego $\epsilon > 0$, istnieje n_0 takie, że każdy graf o $n \geq n_0$ wierzchołkach i*

$$||G|| \geq t_{r-1}(n) + \epsilon n^2$$

krawędziach zawiera $K_s^r := K(\underbrace{s, s, \ldots, s}_{r})$ – r-dzielny graf pełny.

Z tego wynika ważny wniosek.

Wniosek 7 (D 7.1.3 Erdős, Simonovits, 1966)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ex(n, H)}{\binom{n}{2}} = \frac{\chi(H) - 2}{\chi(H) - 1}$$

Dowód: Niech $\chi(H) = r$. Wtedy dla każdego n, $H \not\subseteq T^{r-1}(n)$,a zatem $ex(n, H) \geq t_{r-1}(n)$. Z drugiej strony, dla dostatecznie duzych s, $H \subseteq K_s^r$, więc $ex(n, H) \leq ex(n, K_s^r)$. Na podstawie Tw. 25, dla każdego $\epsilon > 0$ i dostatecznie dużych n,

$$ex(n, K_s^r) \leq t_{r-1}(n) + \epsilon n^2.$$

Ostatecznie

$$t_{r-1}(n) \leq ex(n, K_s^r) \leq t_{r-1}(n) + \epsilon n^2$$

i dzieląc przez $\binom{n}{2}$ oraz przechodząc z $n \to \infty$, otrzymujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ex(n,H)}{\binom{n}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{t_{r-1}(n)}{\binom{n}{2}} = \frac{r-2}{r-1}.$$

■

(Niestety Wniosek 7 nie mówi wiele o grafach dwudzielnych.)

Def. grafu regularności: Dane są ϵ-regularny podział $\Pi := (V_0, \ldots, V_k)$ grafu G i liczba $d \in [0,1]$ (tzw. próg gęstości). Niech $R = R(\Pi, d)$ będzie grafem o zbiorze wierzchołków $\{v_1, \ldots, v_k\}$, w którym $v_i v_j$ jest krawędzią wgdy para (V_i, V_j) jest ϵ-regularna o gęstości $d_G(V_i, V_j) \geq d$.

Graf R_s powstaje przez powiększenia (blow-up) grafu R w skali s, tzn. każdy wierzchołek v_i grafu R zastępujemy zbiorem niezależnym U_i mocy s, a każdą krawędź – grafem pełnym 2-dzielnym $K_{s,s}$.

Lemat 13 (D 7.5.2 Lemat o zanurzaniu – „Weak Blow-up Lemma") *Dla każdego $d > 0$ i $\Delta \geq 1$ istnieje $\epsilon_0 > 0$ takie, że dla każdego grafu H, $\Delta(H) \leq \Delta$, dla każdego s i dla każdego grafu G wraz z ϵ-regularnym podziałem Π, $\epsilon \leq \epsilon_0$, w którym każdy zbiór poza śmietnikiem ma moc $l \geq s/\epsilon_0$, zachodzi implikacja:*

$$H \subseteq R_s(\Pi, d) \Longrightarrow H \subseteq G$$

Dowód: (Idea: sekwencyjne zanurzanie wierzchołków z troską o przyszłość.) Niech $H \subseteq R_s := R_s(\Pi, d)$. Uporządkujmy wierzchołki H dowolnie: $u_1, \ldots, u_h$, $h = |H|$. Dla każdego i, niech $j = \sigma(i)$ będzie takie, że $u_i \in U_j$. Chcemy zanurzyć H w G, tzn. przypisać każdemu $u_i \in V(H)$ pewien $v_i \in V_{\sigma(i)}$.

Niech $Y_i^0 = V_{\sigma(i)}$ będzie początkowym zbiorem kandydatów na v_i. Zbiory kandydatów będą modyfikowane w trakcie sekwencyjnego zanurzania: gdy jako obraz pewnego u_j wybierzemy v_j, to dla każdego $i > j$ takiego, że $u_j u_i \in H$, obetniemy Y_i^{j-1} do

$$Y_i^j := Y_i^{j-1} \cap N_G(v_j).$$

Ponieważ takich u_i jest co najwyżej Δ, v_j można wybrać tak, by wszystkie zbiory Y_i^j miały rozmiar co najmniej $(d-\epsilon)|Y_i^{j-1}|$. Rzeczywiście, z Zadania

107 wynika, że wierzchołków nie spełniających tego wymogu jest nie więcej niż $\Delta\epsilon l$, o ile
$$|Y_i^{j-1}| \geq \epsilon l.$$
Trzeba też pokazać, że wybór v_j jest możliwy, tzn., że
$$|Y_j^{j-1}| - \Delta\epsilon l \geq s$$
(bo, być może, obrazy $s-1$ innych wierzchołków z $U_{\sigma(j)}$ zostały już wybrane i to właśnie z Y_j^{j-1}).

Obie powyższe nierówności wynikają z nierówności
$$|Y_i^j| \geq (d-\epsilon_0)^{d_{ij}} l,$$
którą udowodnimy indukcją po j. Tutaj,
$$d_{ij} = |N_H(u_i) \cap \{u_1, \ldots, u_{j-1}\}|.$$
Dla $\epsilon_0 < \frac{1}{\Delta+1} d^{\Delta}$ mamy
$$|Y_i^{j-1}| \geq (d-\epsilon_0)^{\Delta} l \geq (\Delta+1)\epsilon_0 l$$
i Zadanie 107 można stosować, co w zasadzie kończy dowód. ■

Idea dowódu Twierdzenia 25: Stosujemy Lemat 9 z tak dobranymi parametrami, by graf regularności $R(\Pi, d)$ miał więcej niż
$$\frac{1}{2}k^2\frac{r-2}{r-1} \geq t_{r-1}(n)$$
krawędzi, i na podstawie Tw. Turána zawierał graf pełny K^r. Wtedy też R_s zawiera K_s^r, i na podstawie Lematu 13, rownież G zawiera K_s^r. ■

13.2 Krawędziowe liczby Ramseya (Twierdzenie 9.2.2 w podręczniku)

Twierdzenie 26 (D 9.1.1 Ramsey, 1930)

Liczbą Ramseya $R(H)$ nazywamy najmniejszą liczbę naturalną N taką, że każde 2-kolorowanie krawędzi grafu pełnego K^N prowadzi do monochromatycznej kopii grafu H. Gdy $H = K^n$, to piszemy $R(n)$ zamiast $R(K^n)$. Na przykład $R(3) = 6$. Wiadomo, że dla $n > 3$, $R(n) > 2^n$. Jednak dla rzadkich grafów H (a takimi są grafy o ograniczonym maksymalnym stopniu) liczby Ramseya $R(H)$ rosną liniowo z $n = |H|$.

Twierdzenie 27 (D 9.2.2, Chvatál, Rödl, Trotter, Szemerédi, 1983) *Dla każdego $\Delta \geq 1$ istnieje $c > 0$ takie, że dla każdego grafu H o maksymaknym stopniu $\Delta(H) \leq \Delta$ mamy $R(H) \leq c|H|$.*

Dowód: Przyjmijmy $d = 1/2$. Niech $\epsilon_0 = \epsilon_0(d, \Delta)$ będzie jak w Lemacie 13. Ustalmy też $m = R(\Delta + 1)$ i wybierzmy $\epsilon \leq \epsilon_0$ tak, by

$$2\epsilon < \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \ .$$

Niech $M = M(\epsilon, m)$ będzie jak w Lemacie Szemerédiego 9.

Pokażemy prawdziwość twierdzenia dla $c = \frac{M}{\epsilon_0(1-\epsilon)}$. Niech $n = |H|$, $N = cn$ i niech $K^N = G \cup \bar{G}$ będzie 2-kolorowaniem grafu pełnego K^N, gdzie przez G oznaczamy graf złożony z czerwonych krawędzi (a przez $\bar{G}$ – z niebieskich).

Stosując Lemat 9 do G otrzymujemy ϵ-regularny podział $\Pi = \{V_0, V_1, ..., V_k\}$, gdzie $|V_0| < \epsilon N$, $|V_1| = ... = |V_k| = l$ i $m \leq k \leq M$. Zauważmy, że

$$l = \frac{N - |V_0|}{k} \geq \frac{n}{\epsilon_0} \ .$$

Oszacujmy od dołu liczbę krawędzi grafu regularności $R = R(\Pi, 0)$ reprezentującego pary ϵ-regularne podziału Π bez żadnych warunków na ich gęstość (stąd drugi parametr jest równy 0). Mamy

$$||R|| \geq \binom{k}{2} - \epsilon k^2 > \frac{m-2}{2(m-1)} k^2 \geq t_{m-1}(k) \ .$$

Zatem na podstawie tw. Turána $R \supset K^m$. Oznaczmy tę klikę przez K i pomalujmy jej krawędzie $\{i, j\}$ na dwa kolory: *różowy*, jeśli $d_G(V_i, V_j) \geq 1/2$ i *błękitny* w przeciwnym razie. Z definicji liczby Ramseya, tak pomalowany graf K zawiera klikę $K^{\Delta+1}$, której wszystkie krawędzie są w tym samym kolorze.

Ponieważ $\chi(H) \leq \Delta + 1$, to $H \subseteq K_n^{\Delta+1}$, gdzie $K_n^{\Delta+1}$ powstaje z $K^{\Delta+1}$ przez n-krotne rozdmuchanie. Zatem, jeśli tym kolorem jest różowy, to $H \subseteq R_n(\Pi, 1/2)$ i na podstawie Lematu 13 $H \subseteq G$. Jeśli natomiast tym kolorem jest błękitny, to to samo jest prawdą w stosunku do grafu $\bar{G}$. Korzystamy tu z Zadania 106. ∎