Teoria Grafów 2

Zestaw zadań nr 1

Termin realizacji: czwartek, 5 marca, dokończenie 12 marca

1. Udowodnić, że każdy k-regularny graf 2-dzielny ma skojarzenie doskonałe, a więc i 1-faktoryzację, tzn. rozkład zbioru krawędzi na k rozłącznych skojarzeń doskonałych.
2. Wykazać, że graf Petersena nie ma 1-faktoryzacji.
3. Udowodnić, że każdy $2k$-regularny graf posiada 2-faktoryzację, tzn. rozkład zbioru krawędzi na rozłączne 2-regularne podgrafy rozpięte.
4. (Tw. Halla z defektem) Udowodnić, że jeśli w grafie 2-dzielnym G dla każdego $S \subseteq V_1$ mamy $|N(S)| \geq |S| - d$, to G ma skojarzenie nasycające wszystkie oprócz co najwyżej d wierzchołków zbioru V_1.
5. Show that every bipartite graph contains a matching saturating all vertices of maximum degree.
6. Znajdź zbiór S z Tw. 3, gdy G jest lasem.
7. Sformułuj i udowodnij Tw. Tutte'a z defektem.

   Wskaz.: zajrzeć do podręcznika LUB uzyć tw. strukturalnego (obserwacja 1) z 1. wykładu
8. Wywnioskuj Tw. Halla z Tw. Tutte'a.
9. Dla dowolnej liczby naturalnej k, pokazać, że każde dwa podziały skończonego zbioru na podzbiory mocy k mają wspólny system różnych reprezentantów.
10. *An $r \times s$ Latin rectangle based on* $[n]$ is an $r \times s$ matrix A such that each entry belongs to $[n]$ and each integer from $[n]$ occurs in each row and column at most once.

    (a) Prove that every $r \times n$ Latin rectangle can be extended to an $n \times n$ Latin square.

    (b) Show that an $r \times s$ Latin rectangle can be extended to an $n \times n$ Latin square iff for each $i = 1, \ldots, n$ occurs in A at least $r + s - n$ times.

    Wskaz.: do (b) przyda sie zadanie 5.
11. Każdy k-regularny graf o parzystej liczbie wierzchołków bez cięć krawędziowych mocy $k - 2$ ma 1-faktor.
12. Pokazać, że
$$\nu(G) \geq \frac{|E(G)|}{2\Delta(G) - 1}.$$
    (Tutaj $\nu(G)$ – moc największego skojarzenia.)
13. Niech M będzie skojarzeniem w G a $k \geq 1$. Jeśli w G nie ma scieżek rozszerzających (ąugmenting") M krótszych niż $2k + 1$, to
$$|M| \geq \frac{k}{k+1}\nu(G).$$
14. Pokazać, że jeśli $\nu(H) \leq s$, to $\nu(S_{ij}(H)) \leq s$.
15. Pokazać, że jeśli H jest k-jednostajny, $n := |V(H)|$ jest podzielne przez k oraz $|H| \geq \binom{n-1}{k} + 1$, to H ma skojarzenie doskonałe.

    Wskazówka: na rozgrzewkę zróbcie najpierw przypadek $k = 2$ (grafy) i to na 2 sposoby (1) korzystając z faktoryzacji, (2) stosując metodę probabilistyczną (wylosować skojarzenie doskonałe w grafie pełnym i ...). Potem to samo dla k-grafów.

16. Let MAX-MATCH be a procedure which for every graph finds a maximal (w/r to containment) matching in that graph. Given a $2n$-vertex graph G satisfying the Dirac condition $\delta(G) \geq n$, construct a perfect matching in G by applying Procedure MAX-MATCH twice: first to G itself and then to an auxiliary graph B built upon the found matching and the rest of G.*

    Hint: prove first that a maximal matching has size at least a half of a maximum one. (This, in fact, follows from Exercise 13)

17. If the minimum pair degree in an n-vertex 3-graph H, where n is divisible by 3, is at least $n/3 - 1$ then H contains a matching covering all but at most 3 vertices.

18. If the minimum vertex degree in an n-vertex 3-graph H, where $3|n$, is at least $\frac{2}{3}\binom{n}{2}$ then H has a perfect matching.*

Zadania oznaczone * są dodatkowe, dla chętnych o aspiracjach na bdb. Należy przyjść do mnie i podać rozwiązanie na tablicy, tak bym zrozumiał bez trudu. Jeśli to się uda, to dopiero wtedy poproszę o spisanie w latex-u.