Teoria Grafów 2

Zestaw zadań nr 2

Termin realizacji: czwartek, 19 marca

1. Udowodnić, że w dowolnym grafie $\gamma(G) \leq 2\beta(G)$, jak również $\gamma(G) = n - \alpha(G)$.
2. W każdym grafie G istnieje pokrycie co najwyżej $\alpha(G)$ ścieżkami.
3. Niech $\mathcal{C} = \{K_1, K_2, C_3, C_4, ...\}$. W każdym grafie G istnieje $\mathcal{C}$-pokrycie mocy co najwyżej $\alpha(G)$.
4. Sformułować i udowodnić tw. dualne do Tw. Dilwortha.
5. Wywnioskować Tw. Halla z Tw. Gallai'a-Milgrama
6. Wywnioskować z Tw. Gallai'a-Milgrama, że każdy turniej posiada (skierowaną) ścieżkę Hamiltona.
7. Jeśli $\delta(G) \geq 3$ to G zawiera cykl krótszy niż $2\log_2 |G|$.
8. Dla każdej stałej $L > 0$ i odpowiednio dużego k skonstruować graf G, który nie ma k rozłącznych cykli, ale którego wszystkich cykli nie da się pokryć przy pomocy mniej niż Lk wierzchołków.
9. Pokazać, że żaden graf nie ma więcej niż $\binom{n}{2}$ minimalnych cięć krawędziowych. Znaleźć grafy osiągające to oszacowanie.*
10. Pokazać, że każdy graf zawiera cykl dlugości większej niż $\delta(G)$ (o ile $\delta(G) \geq 2$).
11. Jeśli G jest spójny, to każde dwie najdłuższe sciezki mają wspólny wierzchołek.
12. Jeśli spójny graf ma co najmniej $2k + 1$ wierzchołków i minimalny stopień co najmniej k ($k \geq 1$), to zawiera ścieżkę długości $2k$.
13. Pokazać, że jeśli graf nie ma zbioru niezależnego mocy 3 to ma cykl długości co najmniej $n/2$, gdzie $n \geq 5$ jest liczbą wierzchołków.
14. Udowodnić, że dla grafów spójnych
$$diam(G) < \frac{3|V(G)|}{\delta(G)}.$$
(Tutaj $diam(G)$ oznacza średnicę grafu, to znaczy maksymalną odległość wierzchołków, a ta z kolei, to dlugość najkrótszej ścieżki.)
15. Jeśli $\delta(G) \geq 3$, to
    (i) G zawiera parzysty cykl;
    (ii) największy wspólny dzielnik długości wszystkich cykli w G jest nie większy niż 2.