Teoria Grafów 2

Zestaw zadań nr 3

Termin realizacji: poniedziałek, 20 kwietnia

1. Pokazać, że lesistość grafu dana jest wzorem

$$\left\lceil \max_{H \subseteq G} \frac{||H||}{|H|-1} \right\rceil$$

2. Wyznaczyć lesistość grafów K_n i $K_{n,m}$ oraz skonstruować optymalne podziały na lasy dla K_n i $K_{4,4}$.

3. Wyznaczyć lesistość grafów k-regularnych oraz wskazać optymalny podział grafu Petersena.

4. *Liniową lesistość* definiuje się tak samo jak zwykłą, ale wymaga sie, by każda skladowa każdego lasu była ścieżką. Korzystając z podziału grafu pełnego na cykle Hamiltona, wykazać, że liniowa lesistość i lesistość grafu pelnego pokrywają się.

5. Istnieje hipoteza, że liniowa lesistość i lesistość pokrywaja sie dla każdego grafu regularnego. Hipoteza ta pozostaje otwarta, choć wykazano ja już dla grafów k-regularnych, $k \leq 10$. Dla $k = 2$ jest trywialna. Dla $k = 3$ już nie.

   a) Korzystajac z Tw. Eulera pokazać, że z prawdziwosci hipotezy dla $k = 3$ wynika jej prawdziwość dla $k = 6$, dla grafów o parzystej liczbie krawedzi.

   b) Korzystając z Tw. Eulera i Tw. Petersena pokazac, że z prawdziwości hipotezy dla $k = 5$ i pewnego nieparzystego $r \geq 5$, wynika jej prawdziwość dla $k = r + 5$, dla grafów o parzystej liczbie krawędzi.

6. Pokazać, że dla drzewa o maksymalnym stopniu Δ, jego liniowa lesistość wynosi $\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$.

7. Udowodnić, że jeśli graf G można skonstruować zaczynając od cyklu i kolejno dodając H-ścieżki do aktualnego grafu H, to G jest 2-spójny.

8. Zbiór $U \subseteq V(G)$ nazywamy *dominującym*, gdy $V(G) = U \cup N_G(U)$. Mówimy, że dwupodział $V(G) = V_1 \cup V_2$ *rozdziela* zbiór U, gdy istnieją $v_1, v_2 \in U$ takie, że $v_i \in V_i$ dla $i = 1, 2$. Pokazać, że dla każdego zbioru dominującego U, każdy dwupodział $V(G) = V_1 \cup V_2$, gdzie $V_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$, i $e(V_1, V_2) < \delta_G$, rozdziela U.

9. Wywnioskować Tw. Königa z Tw. Mengera.

10. Zbiór $a - B$ ścieżek nazywamy wachlarzem (fan) jeśli każde dwie z nich mają tylko 1 wspólny wierzchołek (a). Udowodnić, że dla $B \subset V$ i $a \in V \setminus B$, minimalna liczba wierzchołków rozdzielających a od B i różnych od a jest równa maksymalnej mocy $a - B$ wachlarza.

11. Niech a i b będą różnymi wierzchołkami w G. Jeśli $ab \notin E$, to minimalna liczba wierzchołkow rozdzielajacych a od b, ale różnych od a i b, jest równa maksymalnej liczbie niezależnych $a - b$ ścieżek.

12. Niech a i b będą różnymi wierzchołkami w G. Minimalna liczba krawędzi rozdzielających a od b jest równa maksymalnej liczbie krawędziowo rozłącznych $a - b$ ścieżek.

13. G jest krawędziowo k-spojny wgdy zawiera k krawedziowo rozłącznych ścieżek pomiędzy każdą para różnych wierzcholków.

14. Jeśli G jest 2-spójny, $G \neq K^3$, to dla każdej krawędzi e, $G - e$ lub $G|e$ jest też 2-spójny.

15. Jeśli G jest 3-spójny, $xy \in E$, to $G|xy$ jest 3-spójny wgdy $G - \{x, y\}$ jest 2-spójny.

16. G jest 3-spójny i 3-regularny wgdy można go otrzymać z K^4 w wyniku ciągu operacji polegających na postawieniu po 1 nowym wierzchołku na dwóch krawędziach i połaczeniu nowych wierzchołków ze sobą.

17. Jeśli G jest k-spójny, $k \geq 2$ i $|G| \geq 2k$, to G zawiera cykl długości co najmniej $2k$.

18. Jeśli G jest k-spójny, $k \geq 2$, to każde k wierzchołków leży na cyklu.

19. Jeśli G jest spójny, k-regularny i 2-dzielny, to jest 2-spójny.

20. Jeśli G jest krawędziowo $2k$-spójny, to G ma k rozłącznych rozpiętych drzew.

21. Graf skierowany jest *silnie spójny* jeśli dla każdej uporządkowanej pary wierzchołków (a, b) istnieje skierowana $a - b$ ścieżka.

    Udowodnić, że turniej jest silnie spójny wgdy jest hamiltonowski.

22. Dla $n \geq 3$, niech $G_n = K_n - \lfloor n/2 \rfloor K_2$, tzn. G_n jest otrzymany z grafu pełnego przez usunięcie największego skojarzenia. Obliczyć $\kappa(G_n)$.

23. Pokazać, że każdy k-zwarty graf jest $(2k-1)$-spójny, i że odwrotnie być nie musi.

24. Każdy graf G o $||G|| \geq 1$ ma podgraf H taki, że

$$\delta(H) > \frac{1}{2}d(H) \geq \frac{1}{2}d(G)$$