Teoria Grafów 2

Zestaw zadań nr 5 (POPRAWIONY!)

Termin realizacji: czwartek, 11 czerwca

1. Niech $G = (X, Y, E)$ będzie dwudzielnym grafem ϵ-regularnym o gęstości $d_G(X, Y) = d$. Pokazać, że

   (a) jeśli $d > 2\epsilon$, to istnieje zbiór $A \subseteq [X]^2$ o mocy $|A| \geq (1-6\epsilon)\binom{|X|}{2}$ taki, że dla wszystkich par $u, v \in A$ mamy
   $$(d-\epsilon)|Y| \leq \deg u, \deg v \leq (d+\epsilon)|Y|$$
   oraz
   $$(d-\epsilon)^2|Y| \leq \deg(u,v) \leq (d+\epsilon)^2|Y| \ ;$$

   (b) jeśli $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, $|A| > \eta|X|$ i $|B| > \eta|Y|$, gdzie $\eta \leq 1/2$, to podgraf $G[A \cup B]$ grafu G indukowany przez zbiory A i B jest ϵ/η-regularny;

   (c) jeśli $E' \subseteq E$, $|E'| = \eta|E|$, to podgraf $G - E' = (X, Y, E - E')$ jest $(\epsilon + \eta\frac{d+\epsilon}{\epsilon^2})$-regularny.

2. Niech $G = (X, Y, E)$, $n = |X| = |Y|$, będzie dwudzielnym grafem ϵ-regularnym o gęstości $d_G(X, Y) = d$. Wprowadźmy (niestandardowe) oznaczenie $N(S) = \bigcap_{v \in S} N_G(v)$ dla zbioru wszystkich *wspólnych* sąsiadów wierzchołków zbioru S, gdzie $S \subseteq X$. Mówimy, że zbiór S jest *dobry*, gdy
   $$(d-\epsilon)^{|S|} \leq |N(S)| \leq (d+\epsilon)^{|S|} \ .$$
   Pokazać, że jeśli $\epsilon \leq (d-\epsilon)^k$, to

   (a) każdy dobry zbiór S mocy k jest zawarty w co najwyżej $2\epsilon n$ złych (= nie dobrych) zbiorach mocy $k+1$;

   (b) wszystkie zbiory k-elementowe $S \subseteq X$, oprócz co najwyżej $3\epsilon k\binom{n}{k}$, są dobre.

3. Niech $G = (X, Y, E)$, $n = |X| = |Y|$, będzie dwudzielnym grafem ϵ-regularnym o gęstości $d_G(X, Y) = d > 2\epsilon$. Pokazać, że jeśli $\delta(G) \geq \epsilon n$, to G ma skojarzenie doskonałe. Czy w tym zadaniu ϵ-regularność można zastąpić słabszym warunkiem?

4. Pokazać, że jeśli graf G o n wierzchołkach posiada ϵ-regularny podział $(V_0, V_1, ..., V_k)$, gdzie $|V_0| < \epsilon n$, to posiada on też $\sqrt{\epsilon}$-regularny podział $(V_0', V_1', ..., V_k')$, gdzie $|V_0'| \leq k-1$. Czy stała $\sqrt{\epsilon}$ jest tu najlepsza możliwa?*

5. Dane są 3 zbiory wierzchołków X, Y i Z, wszystkie mocy n. Pokazać, że jeśli $G_1 = (X, Y, E_1)$, $G_2 = (X, Z, E_2)$ i $G_3 = (Y, Z, E_3)$ są ϵ-regularnymi grafami dwudzielnymi, każdy o gęstości d, to liczba trójkatów T w sumie grafów $G_1 \cup G_2 \cup G_3$ spełnia nierówności
   $$(1-2\epsilon)(d-\epsilon)^3 n^3 < T < \left[2\epsilon + (d+\epsilon)^3\right] n^3$$

6. Pokazać, że każda para (X, Y), która jest ϵ-regularna w grafie G, jest także ϵ-regularna w dopełnieniu G^c grafu G.

7. Jeśli (A, B) jest ϵ-regularną parą o gęstości d, oraz $Y \subseteq B$, $|Y| \geq \epsilon|B|$, to wszystkie oprócz co najwyżej $\epsilon|A|$ wierzchołków $v \in A$ mają co najmniej $(d-\epsilon)|Y|$ sąsiadów w Y.

Kolejność zadań według trudności (od najłatwiejszych): 6,7,3,5,1,2,4*